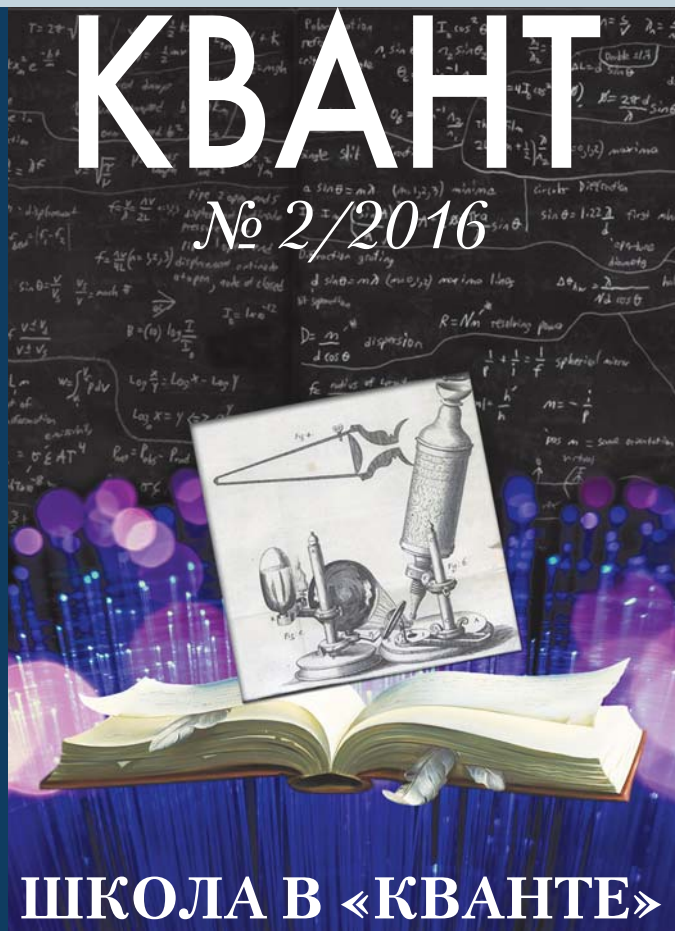




ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№ 2/2016



ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ФИЗИКА

Часть 2

Приложение к журналу

«КВАНТ»

№2/2016

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ФИЗИКА

Часть 2

Составители

В.А. Тихомирова, А.И. Черноуцан

Москва

Издательство МЦНМО

2016

УДК 53
ББК 22.3
Ш67

Приложение к журналу
«Квант» №2/2016

Ш67 Школа в «Кванте». Физика. Часть 2 / Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. – М.: Издательство МЦНМО, 2016. – 192 с. (Приложение к журналу «Квант» №2/2016.)

ISBN 978-5-4439-1039-0

Книга представляет собой сборник статей по всем разделам школьной физики, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Школа в «Кванте» в течение 2004–2008 годов. Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками и живость изложения – вот отличительные особенности статей этой рубрики.

Книга адресована, прежде всего, учащимся и учителям средних школ, лицеев и гимназий. Но она, несомненно, будет интересна и самому широкому кругу читателей.

ББК 22.3

ISBN 978-5-4439-1039-0



9 785443 910390 >



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. МЕХАНИКА	5
Как попасть на Таинственный остров (6). Два торнадо и несколько ворон (13). Явление природы или биологическая диверсия? (17). Булава (21) Херувимы, серафимы, самолеты... (27). Принцип Торричелли и центробежная сила инерции (31). Ворона – хвостом вперед? (37). Физика внутри автобуса (40). Наблюдения в «нефизическом» мире (44). Почему они летят строем (50). Как Студент думал Землю остановить (54). Мосты и парашюты (58). С полюса – на полюс (62). Практическая задача по механике (66). Урок близился к завершению... (68).	
Глава 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА	71
Путешествие на воздушном шаре (72). Критическое поведение (77). Как молекулы столкнулись (83). Ракета на водяном паре, или Как Студент с Луны улетал (87).	
Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	91
Новая галактика и все ее поля (92). В цепи переменного тока (97). Ковчег завета и электрическая машина (100). Как исследовать магнитную катушку (105). Электрические машины и выбор режима (110). Как Студент магнитное поле измерял (113). Магнитная сила и закон электромагнитной индукции (118).	
Глава 4. ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА	125
Угол падения равен... (126). «Загадка» тени от прозрачной пластинки (130). Разглядывая шариковую ручку (136). Фокус шара (140). Размерности и... правило квантования Бора (144). Можно ли в микроскоп молекулу разглядеть? (148).	
Глава 5. ОБЩЕЕ	154
От пяди до Вселенной (155). О роли парадоксов в развитии науки (165). Людмила, Черномор и шапка-невидимка (172). От простого – к сложному (176). Три эссе на физические темы (181). Тема с вариациями (187).	

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге представлена одна из постоянных рубрик нашего журнала – «Школа в «Кванте». Возникнув около тридцати пяти лет назад, «Школа» сразу завоевала популярность у читателей, интерес к ней не ослабевает и по сей день.

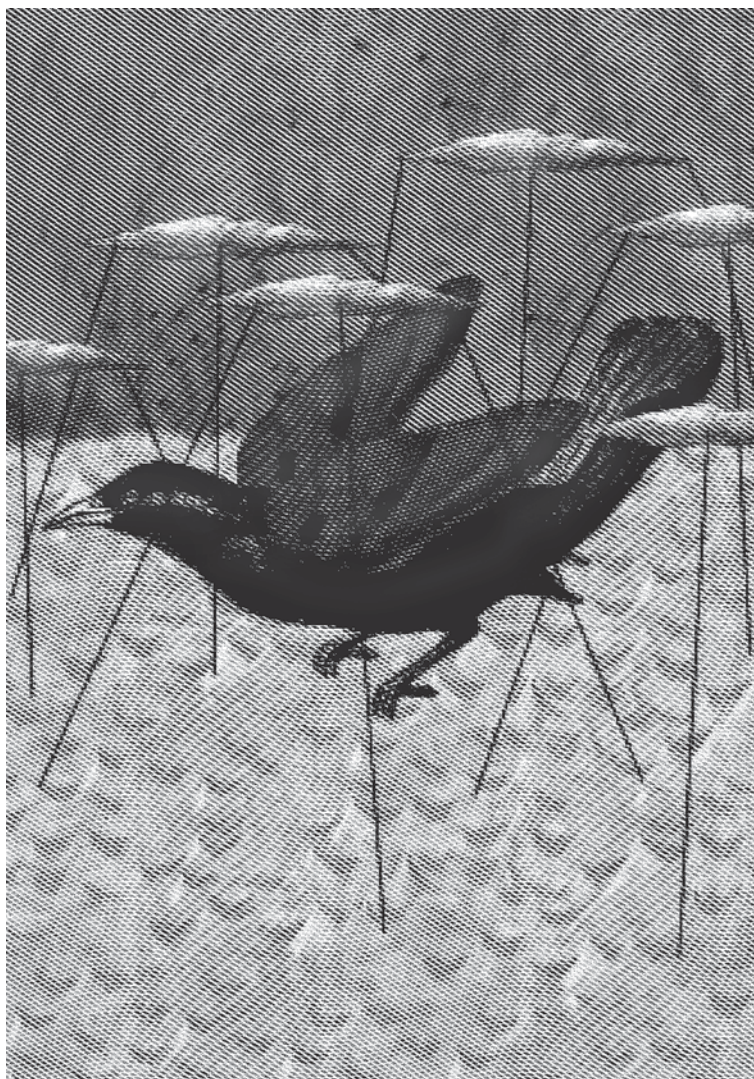
Материалы этой рубрики, как правило менее сложные и элитарные по сравнению с материалами других рубрик, рассчитаны на самый широкий круг читателей. Темы статей обычно перекликаются с разделами школьной программы по физике. Можно сказать, что «Школа в «Кванте» – это интересное чтение «вдоль» этой программы.

Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками, живость и своеобразная эссеичность изложения не только делают статьи «Школы» доступными для самостоятельного изучения, но и позволяют использовать их для докладов и рефератов на школьных факультативах и конференциях или просто для «оживления» текущих занятий.

За прошедшие годы накопилось так много статей «Школы в «Кванте» по физике, что мы решили собрать их в несколько книг. Причем каждую книгу сделать «полноценной», независимой от других – в том смысле, что в нее войдут статьи по всем разделам физики, от кинематики до атомного ядра.

Перед вами – второй выпуск задуманной серии.

МЕХАНИКА



КАК ПОПАСТЬ НА ТАИНСТВЕННЫЙ ОСТРОВ

А.Стасенко

«Драматические события развернулись «над пустынной ширью Тихого океана... 23 марта 1865 года.

...Пассажиры воздушного шара вновь заметили, что они медленно, но непрерывно спускаются... Аэронавты оказались в ужасном положении.

...Выбросив из гондолы все, что там находилось, воздухоплателям удалось продержаться в воздухе несколько лишних часов.

...К двум часам дня аэростат оказался уже на расстоянии четырехсот футов от поверхности океана.

...Цепляйтесь все за сетку. А гондолу в воду!

...И лишь только гондола оторвалась, аэростат поднялся на высоту в две тысячи футов.

...Но, продержавшись одно мгновение вверх, аэростат опять стал спускаться. Газ утекал сквозь дыру в оболочке, и повреждение невозможно было исправить.

...Надежда была только на чудо. В четыре часа дня шар оказался всего лишь на высоте пятсот футов от поверхности океана.

— Земля! Земля!

Но земля находилась на расстоянии тридцати миль. Достигнуть ее аэростат мог по меньшей мере через час, да и то при условии, что ветер не переменится.

...Однако... стало совершенно очевидно, что шар больше держаться в воздухе не может. Он летел, касаясь поверхности воды.

Полчаса спустя до берега оставалось не больше мили.

...Оболочку выгнуло горбом, и ветер, надув ее, помчал по воде, словно парусную лодку.

...Он был уже в двух кабельтовых от берега, как вдруг у четырех путников вырвался крик ужаса. Взметнулся грозный вал, и шар, как будто уже лишившийся подъемной силы, неожиданно взлетел вверх. Словно избавившись от какой-то

части своего груза <Смита и его собаки Топа>, он поднялся на тысячу пятьсот футов.

...В гондole аэростата было пятеро путников и собака, но на берег выбросило только четырех человек.

Шар, освободившись ототягающего бремени,.. взмыл вверх и исчез в небесном просторе».

Узнали? Правильно, это «Таинственный остров» Жюль Верна. Мы подробно выписали эту последовательность событий, чтобы представить зависимость от времени массы и высоты полета в виде рисунка 1. Конечно, это только качественный рисунок, сделанный на основании показаний Ж.Верна: тогда еще не было

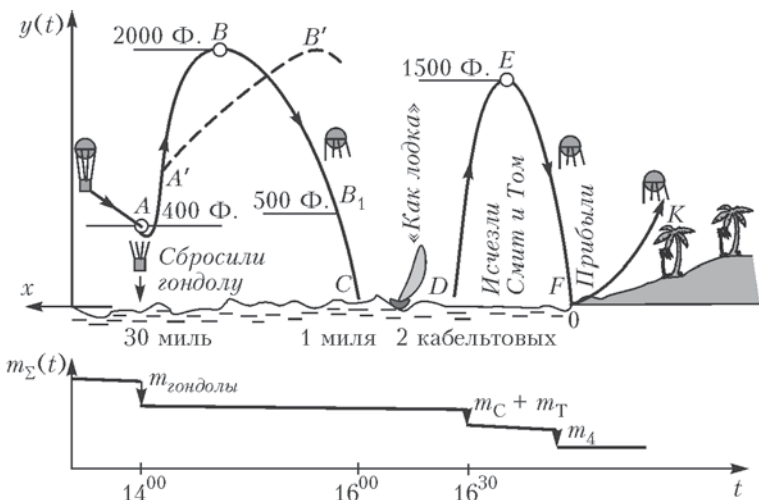


Рис. 1

«черных ящиков» с точной записью параметров. Но и этих сведений достаточно, чтобы попытаться сделать некоторые количественные оценки. Прежде всего, «очевидец» трижды описывает взлет шара вверх после освобождения от очередной порции груза как быстрый процесс: «лишь только...» (AB); «неожиданно взлетел» (DE); «взмыл вверх» (FK). Эти участки траектории отмечены на рисунке крутыми подъемами. А спуск аэростата, следующий за каждым его подъемом, происходил достаточно медленно. Таким образом, тут указаны два сильно отличающихся масштаба времени: $\tau_\uparrow \ll \tau_\downarrow$. Аналогичная ситуация встречается при исследовании многих проблем физики и математики; при этом появляется плодотворная возможность провести так называемое *расслоение по физическим процессам*. Это означает, что в

масштабе «малого времени» можно не рассматривать процессы, которые существенны на «большом времени», и наоборот. В результате исследование упрощается. Например, в нашем случае на участке быстрого подъема AB , согласно описанию Ж.Верна, можно не учитывать изменение массы шара из-за утечки газа, а на участке спуска BC она будет играть определяющую роль.

Но пора сделать и численные оценки, ибо, как говорит древнерусская пословица, физика без оценок – что щи без соли.

Автор сообщил нам, что «объем шара равнялся пятидесяти тысячам кубических футов». Конечно, имеется в виду начальный объем, когда аэростат еще можно было назвать шаром. Стало быть,

$$V_0 = 50 \cdot 10^3 \Phi.^3 = 50 \cdot 10^3 \cdot (0,3)^3 \text{ м}^3 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3.$$

Отсюда легко найти радиус этого шара:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{4/3\pi}} \approx 7 \text{ м}.$$

Далее, более или менее определенная информация начинается с точки A – после сброса гондолы. При этом в пределах указанных значений высоты (наибольшая высота равна $2000 \Phi. \approx 600 \text{ м}$) можно пренебречь изменением плотности атмосферы и считать ее равной $\rho = 1,125 \text{ кг/м}^3$.

А что это за газ, которым был наполнен шар? Конечно, это не мог быть гелий – его открыли тремя годами позднее, да и то в короне Солнца, а на Земле получили (в малых количествах) лишь через тридцать лет после описанной Жюлем Верном драмы. Может, это был теплый воздух, как у современных аэростатов? Но у этих невольных аэронавтов не было ни горелки, ни топлива. Значит, водород? Ну конечно, водород – уже лет семьдесят назад его научились добывать в промышленных масштабах, а использовать для наполнения аэростатов предложил сам Шарль, известный теперь каждому здравомыслящему школьнику. Вспомним, что молярные массы водорода и воздуха относятся как $2 : 29$. При указанном объеме масса газа (водорода) в шаре равна

$$m_{\text{г}} = V_0 \rho_{\text{г}} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3 \cdot \frac{2}{29} \cdot 1,225 \text{ кг/м}^3 = 120 \text{ кг},$$

а подъемная сила (сила Архимеда) шара составляет

$$F_{\text{п}} = V_0 \rho g = 1,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3 \cdot 1,225 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 1,68 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

что соответствует возможной поднимаемой массе чуть больше полутора тонн.

А что известно о пассажирах аэростата? Сайрес Смит – «сухопарый, подтянутый»; Гедеон Спилет – «высокого роста и еще не стар – лет сорока не больше,.. энергичный, подвижный»; негр Нат – «сильный, проворный, ловкий»; моряк Пенкроф – «рослый, крепкий»; юный Герберт Браун – «смелый мальчик»; Топ – «вышколенная англо-нормандская гончая». Судя по этому описанию, пассажиры не были рыхлыми толстяками, поэтому разумно принять массу четырех счастливцев, выброшенных на берег, равной $m_4 = 300$ кг, а массу двух упавших в океан (Смита и Топа) считать равной $m_C + m_T = 100$ кг (для круглого счета).

Итак, пока что мы насчитали суммарную массу порядка полутонны:

$$m_4 + m_C + m_T + m_r = 520 \text{ кг}.$$

В начальный момент шар мог поднять массу порядка одной тонны, в которую, конечно, входит масса оболочки шара $m_{ш}$ (неизбежная, хотя и нежелательная) и масса какого-то еще полезного груза (помимо уже учтенной массы путешественников). Мы уже никогда не узнаем общую начальную массу запаса патронов, оружия, провианта и десяти тысяч золотых франков («тяжелый мешок»), выброшенных еще до точки А (см. рис.1). Но известно, что, как только сбросили весь груз и гондолу, шар поднялся до высоты 2000 Ф. (точка В). В этой точке реализовалось равенство силы Архимеда и силы тяжести всех пассажиров, оболочки шара и водорода (газа):

$$m_4 + m_C + m_T + m_{ш} = V_B \rho \left(1 - \frac{\rho_r}{\rho} \right).$$

Приблизительно через два с половиной часа (в точке Е) аналогичное равенство (но уже без Смита и Топа) дает

$$m_4 + m_{ш} = V_E \rho \left(1 - \frac{\rho_r}{\rho} \right).$$

В последних двух равенствах учтено, что изменились объем шара V и масса оставшегося газа m_r . Строго говоря, в точках В и Е обращается в ноль вертикальная составляющая скорости, а не ускорения, или равнодействующей всех сил. Но начиная с этих точек происходит уже очень медленный спуск, при котором все силы почти уравновешены на «большом времени».

Но что же происходило на «малом времени», когда аэростат «взмывал» вверх после очередного сброса массы? Запишем изменение его кинетической энергии под действием подъемной силы, силы тяжести и силы сопротивления воздуха при измене-

нии высоты на Δy :

$$(m + m') \frac{\Delta v^2}{2} = \left(V\rho g - mg - \frac{1}{2}\rho S \frac{v^2}{2} \right) \Delta y .$$

Здесь m – суммарная масса путешественников, оболочки шара и газа внутри шара. А m' – это очень важная величина, которую никак нельзя забывать при ускоренных движениях аэростатов, дирижаблей, парашютов и пузырьков газа в жидкостях. Она называется *присоединенной массой*. Ее возникно-

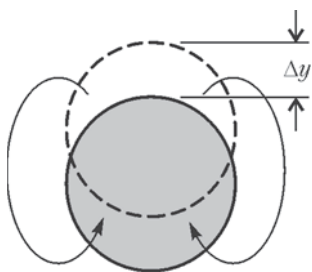


Рис. 2

вание можно пояснить при помощи рисунка 2. Если шар переместится в воздухе на Δy , то воздух должен заполнить пустоту позади него (что условно показано стрелками). Таким образом, ускоренное движение шара вызовет, в принципе, и ускоренное движение всей окружающей атмосферы – к шару как бы «прилипает» некоторая присоединенная масса m' . В теоретической

гидромеханике показано, что она равна половине массы объема воздуха, вытесненного шаром:

$$m' = \frac{1}{2} V\rho \leq \frac{1}{2} V_0\rho = 850 \text{ кг} .$$

Видно, что она больше суммы масс водорода в шаре и всех пассажиров.

Два первых слагаемых в скобках в правой части уравнения, описывающего изменение кинетической энергии аэростата, не требуют пояснений. Последнее слагаемое – это сила аэродинамического сопротивления. Как видно, она пропорциональна плотности воздуха, площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости. А безразмерный множитель – это коэффициент сопротивления, в нашем уравнении выписано его значение для шара.

Конечно, в процессе подъема аэростата изменяется и масса газа (водорода) m_r (за счет вытекания через отверстие), и объем V , и площадь поперечного сечения S , но мы ведь договорились о расслоении по физическим процессам: на «малом времени» эти величины можно считать неизменными.

Теперь введем обозначения:

$$v_*^2 = \frac{V\rho - m}{\rho S} \cdot 4g \text{ и } y_* = \frac{V\rho/2 + m}{\rho S} \cdot 2$$

и перепишем уравнение изменения кинетической энергии аэростата в таком виде:

$$\Delta v^2 = (v_*^2 - v^2) \frac{\Delta y}{y_*}.$$

Тогда решение этого уравнения примет вид

$$\frac{y - y_0}{y_*} = \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{v - v_0}{v_*} \right)^2},$$

где y_0 — начальная высота, v_0 — скорость опускания до сброса gondoly (в точке A) или до «потери» Смита с Топом (в точке D), а y_* и v_* — постоянные величины, смысл которых ясен из рисунка 3: как говорят физики умными словами, скорость асимптотически стремится к постоянному значению v_* на характерном расстоянии y_* .

Выходит, что в наших предположениях аэростат должен вечно подниматься вверх с постоянной скоростью v_* ? (Кстати, ее легко найти из нашего исходного

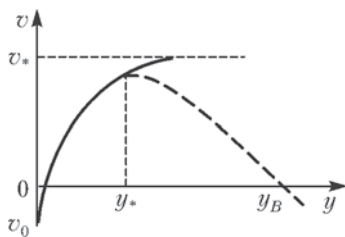


Рис. 3

уравнения, не решая его, а просто приравняв левую часть нулю, что и будет означать установившийся режим.) И тут пора вспомнить о медленном опускании на «большом времени». Мы не знаем, как быстро вытекал водород через отверстие в оболочке шара. Но мы можем оценить среднюю скорость опускания на участке BB_1 : согласно рисунку 1, в течение приблизительно двух часов шар снизился на $1500 \text{ Ф.} = 500 \text{ м}$; значит, средняя скорость опускания была

$$\langle v_{\downarrow} \rangle = \frac{500 \text{ м}}{2 \cdot 3600 \text{ с}} = 7 \text{ см/с}.$$

Заметим, что при такой скорости сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала.

Обсудим подробнее характерное расстояние, или *длину релаксации*

$$y_* = \frac{m + m'}{\rho S/2}.$$

Ясно, что полная масса аэростата m должна быть не больше, чем масса воздуха в объеме шара. Поэтому

$$m + m' \leq V_0 \rho + \frac{1}{2} V_0 \rho = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho = 2 \pi r_0^3 \rho.$$

Отсюда

$$y_* \leq \frac{2\pi r_0^3 \rho}{\rho \pi r_0^2 / 2} = 4r_0.$$

Таким образом, установление скорости происходит на расстоянии, равном приблизительно двум диаметрам шара, т.е. «взмывание» заканчивается на полусотне метров (~ 150 футов). Получается, что траектория движения аэростата выглядит скорее как $AA'B'$, а сила сопротивления воздуха уравнивает убывающую подъемную силу. Конечно, к этому моменту аэростат перестал быть шаром. Если при этом вообразить его, например, цилиндром длиной πr_0 (его меридиан считаем неразжимым), то объем его будет равен $V = \pi r_0 S$.

Собирая всю накопленную информацию, желающий да проведет «разбор полета»: рассчитает, как изменялись его параметры вдоль всей траектории аэростата от A до F . Но при этом надо помнить, что, во-первых, решение *обратных задач* (восстановления событий по их следам) — дело непростое даже при объективных данных, а во-вторых, сама объективность показаний Жюль Верна может вызывать сомнения: не летел же он рядом с аэронавтами на вертолете (иначе сам бы и помог, как благородный человек). Поэтому, например, его показания о быстром взлете и медленном спуске шара ($\tau_{\uparrow} \ll \tau_{\downarrow}$) могут оказаться неправдоподобными, так что вдруг на самом деле эти времена одного порядка ($\tau_{\uparrow} \sim \tau_{\downarrow}$). Мы же ограничимся представленной возможностью поговорить о физике на основе этой забавной выдумки инженера и талантливого писателя теперь уже позапрошлого века.

Приложение для желающих вычислять

1) Плотность стандартной атмосферы на разных высотах:

y , км	0	1	2	3
ρ , кг/м ³	1,225	1,1117	1,0066	0,9094;

2) 1 морская миля = 1852 м;

3) 1 кабельтов = 183 м;

4) 1 фут = 1Ф. = 0,305 м.

ДВА ТОРНАДО И НЕСКОЛЬКО ВОРОН

В.Вышинский

Я шел по опушке осеннего леса, прислушиваясь к крику кукушки. Низко пролетел самолет – кукушка на мгновение замолкла, но, к моей радости, тут же продолжила счет оставшихся лет. Вдруг без видимой причины зашуршали листья, и некоторые из них взметнулись вверх. Линия возмущения хлыстом пробежала по полюне, нарушая тихий покой листьев, и запуталась в ветвях деревьев. Так я впервые «увидел» вихревой след от самолета – два «горизонтальных торнадо», как окрестили американцы это грозное явление. Статистика знает множество летных происшествий и авиакатастроф, связанных с попаданием в вихревой след. Но о грустном – в другой раз.

Что же произошло в лесу? Давайте построим физическую модель явления. При полете самолета в атмосфере, как следствие создания подъемной силы, возникает вихревой след (рис.1,*а*). В первом приближении крыло самолета можно заменить так называемым присоединенным вихрем (рис.1,*б*). Так в свое время предложил делать Л.Прандтль, один из основателей аэродинамики. Вихри имеют свойство не оканчиваться просто так – они либо уходят в бесконечность, либо замыкаются друг на друга, образуя вихревые кольца, либо опираются на твердую поверхность, как это делает смерч (торнадо). От присоединенного вихря вниз по потоку отходит пара вихревых жгутов – свободных вихрей. Получается П-образный вихрь (рис.1,*в*), который является первым приближением вихревой системы самолета.

Свободные вихри имеют противоположную скорость вращения и настолько свободны, что опускаются в атмосфере под действием «взаимной индукции» – скорости, создаваемой своим партнером. Вблизи земли вихри уже так «надоедают» друг другу, что разбегаются в разные стороны. Это связано с условием непротекания, которое проще всего моделируется парой зеркально отраженных «подземных» вихрей противоположного знака (рис.2). Замерив время опускания вихрей и зная тип самолета, можно оценить высоту его полета.

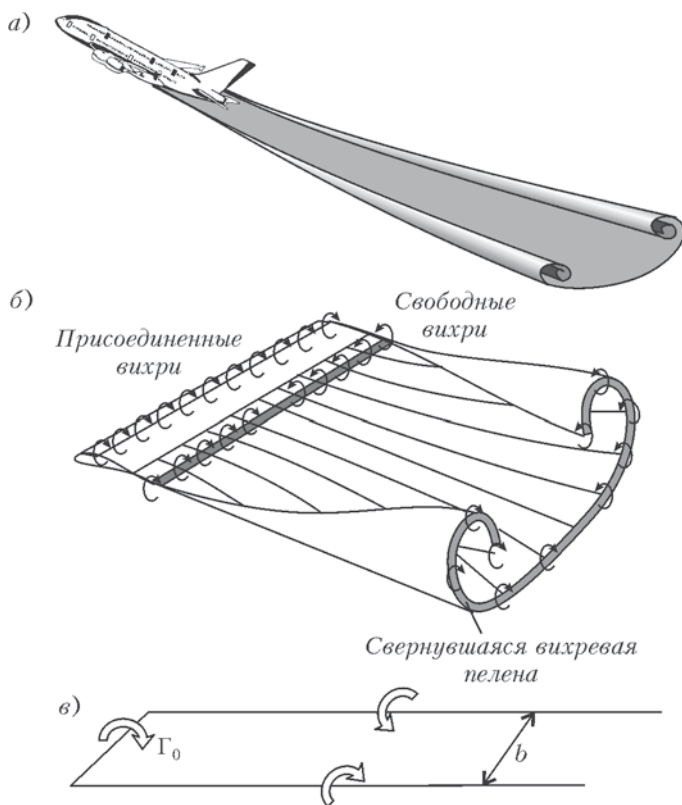


Рис. 1. Вихревой след самолета и его простейшая модель

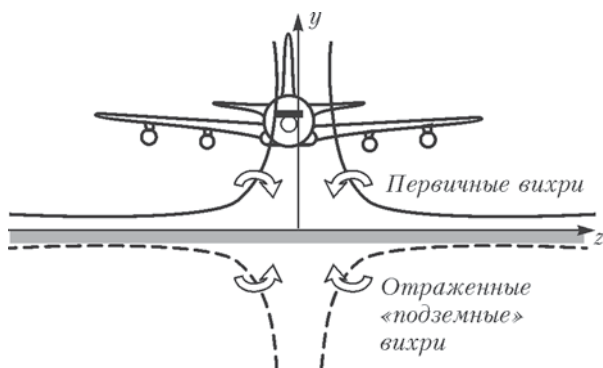


Рис. 2. Разбегание вихрей у земли

Об этом случае я вспомнил в аэропорту города Франкфурта-на-Майне. Там в пространстве под глиссадой — невидимой линией, по которой воздушные суда заходят на посадку, — между двумя параллельными взлетно-посадочными полосами (ВПП) расположены вышки со специальными измерительными приборами — ультразвуковыми анемометрами (рис.3). Эта система

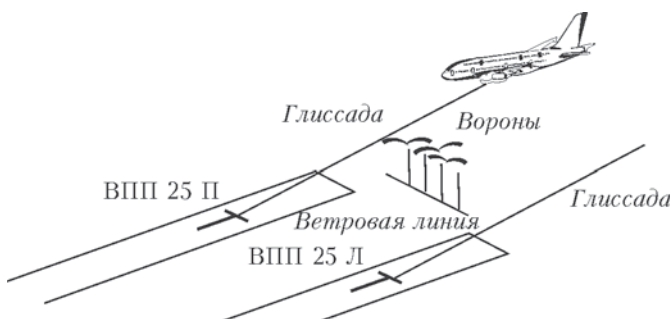


Рис. 3. Схема захода самолета на посадку

называется ветровой линией и служит для определения ветровой обстановки в зоне ВПП. На вышках восседали вороны, лениво перекаркиваясь между собой и не обращая внимания на садящиеся самолеты.

Я стал с интересом наблюдать, что же будет дальше. Вскоре довольно тихо зашел на посадку самолет фирмы «Боинг» (B-747). Он пронесся в воздухе, коснулся ВПП, деловито пробежал почти до полной остановки и свернул на рулежную дорожку. В этот момент с ближайшей к ВПП мачты ветровой линии свалилась ворона. Она, взмахнув крыльями, перевернулась в воздухе, и «кар» застрял у нее в глотке. То же самое повторилось через некоторое время (20–30 секунд) с вороной на соседней мачте. Третья ворона удержалась, но была сильно удивлена и испугана воздушным «шлепком».

Я решил подсчитать скорость разбегания вихрей. Расстояние между вышками около 50 метров, интервал между сваливанием ворон около полминуты; таким образом, скорость разбегания вихрей у земли оказалась порядка 2 м/с. Получился неплохой результат, так что по темпу «сваливания ворон» с вышек можно, в первом приближении, определить тип севшего самолета.

Действительно, пусть известен вес самолета $G = mg$ и размах его крыла l . По теореме Жуковского, погонная подъемная сила профиля крыла (в расчете на единицу длины крыла) пропорциональна так называемой циркуляции скорости Γ (см. Примеча-

ние 1), скорости полета u_∞ и плотности воздуха ρ : $\frac{F_y}{\Delta l} = \rho u_\infty \Gamma$.
Тогда в предположении, что циркуляция распределена приблизительно постоянно по размаху крыла: $\Gamma(z) \approx \Gamma_0$, получим

$$F_y = G = \rho u_\infty \Gamma_0 b ,$$

где $u_\infty \approx 70$ м/с при полете по глиссаде, а b – расстояние между присоединенными вихрями (см. Примечание 2). Скорость, индуцируемая соседним потенциальным вихрем в области данного вихря, равна

$$v_i = \frac{\Gamma_0}{2\pi b} ,$$

так что скорость опускания вихревой пары составляет

$$v_y = \frac{G}{2\pi \rho u_\infty b^2} .$$

Разумно считать, что скорость разбегания вихрей v_z приблизительно равна скорости опускания v_y . Измерив v_z по методу «сваливания ворон», можно найти отношение G/b^2 и по соответствующей таблице определить тип севшего самолета. Например, для самолета Ил-96 (размах крыла $l = 58$ м, максимальная взлетная масса $m = 270$ т) $b \approx 45,5$ м , $G/b^2 \approx 1300$ Н/м² , а для самолета В-747 ($l = 64$ м, $m = 370$ т) $b \approx 50$ м , $G/b^2 \approx 1500$ Н/м² . Более точные расчеты дают скорость опускания вихрей для последнего самолета $v_y = 2,8$ м/с на режиме посадки ($u_\infty = 79$ м/с , $\Gamma_0 = 833$ м²/с) и $v_y = 2,1$ м/с на крейсерском режиме полета ($u_\infty = 250$ м/с , $\Gamma_0 = 605$ м²/с).

Для самолета В-757 ($l = 38$ м, $m = 109$ т) получается $b \approx 30$ м, $G/b^2 \approx 1200$ Н/м² .

Вот что прошуршали мне листья в осеннем лесу и прокаркали вороны во франифуртском аэропорту...

Примечание 1. Циркуляция скорости Γ (ее размерность $[\Gamma] = \text{м}^2/\text{с}$) есть мера завихренности потока. Она определяется как интеграл вдоль замкнутой кривой L от произведения проекции скорости на касательную к этой кривой v_τ и элемента длины кривой ds :

$$\Gamma = \oint_L v_\tau ds .$$

Примечание 2. Расстояние между свободными вихрями b несколько меньше размаха крыла l . Для крыла с эллиптическим распределением циркуляции $\Gamma(z)$ (такое распределение в определенном смысле является оптимальным) $b = (\pi/4)l$.

ЯВЛЕНИЕ ПРИРОДЫ ИЛИ БИОЛОГИЧЕСКАЯ ДИВЕРСИЯ?

В.Вышинский

И Господь навел на сию землю восточный ветер, продолжавшийся весь тот день и всю ночь.

Настало утро, и восточный ветер нанес саранчу.

Исход. X, 13

Они летели низко над морем, на высоте 1–2 метров. Долетев до берега, садились на песок, на скалы, на выброшенные морем водоросли. Подсохнув и отдохнув, улетали дальше, в зелень берега. Тогда они были в диговинку – маленькие, полосатые, очень красивые жучки. Это потом мы узнали, что колорадский жук является злейшим врагом картофеля и не имеет в этих краях естественных врагов. Уже на следующее лето дети давили их камушками прямо на скалах, на песке, в пене прибоя. А они все летели и летели, то ли с кораблей, стоящих на рейде, то ли из-за моря. Поговаривали, что это локальная диверсия – не могут же такие крошки перелететь море...

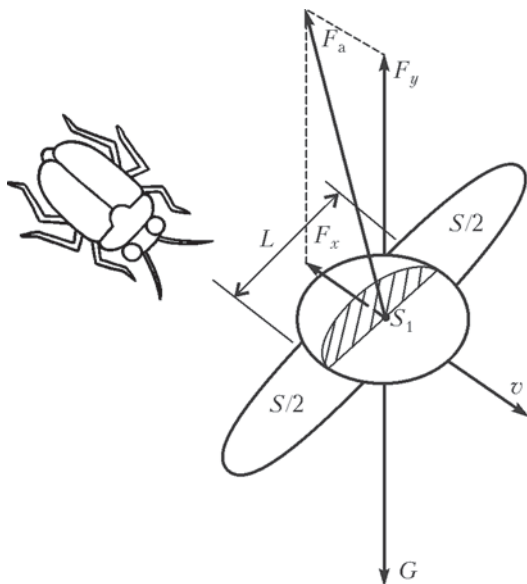
Чтобы выяснить этот вопрос, проведем простые оценки.

Прежде всего, не будем учитывать ветер, тем более что жуки летят очень низко. А вообще-то вечерний бриз (дующий с берега) облегчает старт, а утренний (дующий к берегу) спасает многих обессилевших насекомых, помогая достичь противоположного берега. Будем считать также, что в полете жуки не питаются. Пусть масса их «топлива» равна 30% полной массы, а выделенная энергия поровну (по 10%) тратится на поддержание жизнедеятельности, создание подъемной силы и преодоление сопротивления воздуха. (Известно, например, что свекловичные цикадки перед перелетом запасают жира до 40% от общей массы.)

Примем следующие параметры жука. Пусть его масса $m = 0,5 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$, характерный размер $L = 10 \text{ мм} = 0,01 \text{ м}$, форма тела – полусфера. Для оценки калорийности топлива воспользуемся известными данными для авиационного топлива:

40 МДж/кг. Тогда на работу против сил сопротивления жук может выделить $0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot 40 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} = 2000 \text{ Дж}$.

Далее, рассмотрим силы, действующие на тело, движущееся относительно воздуха с постоянной скоростью v (см. рисунок). Ясно, что вес тела $G = mg$ должен компенсироваться подъемной



силой F_y (которая при горизонтальном полете направлена вертикально вверх). Но при движении в воздухе, увы, возникает и сила сопротивления F_x , которую, очевидно, нужно преодолеть при помощи силы тяги, равной ей по величине и противоположно направленной. Заметим, что результирующая сил \vec{F}_y и \vec{F}_x называется аэродинамической силой \vec{F}_a .

Расчет аэродинамических сил даже для тел фиксированной формы (например, снаряда, ракеты, самолета или футбольного мяча) – очень сложная задача. Поэтому инженеры прибегают к такой хитрости. Они составляют так называемую формулу размерностей, в которую входят все физические величины, влияющие, по предположению, на исследуемую величину, но при этом перед формулой ставят безразмерный множитель, который нужно определить другим способом – например, экспериментально. Для этого во всем мире и построены сотни аэродинамических труб. Конечно, если движущееся тело еще и изменяет свою геометрию (как в случае машущего полета), то проблема

становится еще сложнее. Поэтому в наших оценках будем исходить из некоторых определенных (характерных) значений упомянутых безразмерных коэффициентов.

Итак, из соображений размерности найдем зависимость подъемной силы F_y от плотности воздуха ρ (ее размерность кг/м^3), скорости v (м/с) и площади крыльев S (м^2):

$$F_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S.$$

Теория машущего полета дает значение безразмерного коэффициента подъемной силы крыла C_y от 2 до 5. Будем считать, что перелет совершается при $C_y = 2$ и площадь крыла равна удвоенной площади основания жука (который, по предположению, имеет форму полусферы). Тогда $S = \frac{2\pi L^2}{4} = 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Приравняв подъемную силу F_y весу G , находим скорость полета:

$$v = \sqrt{\frac{2G}{C_y \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,3 \cdot 1,57 \cdot 10^{-4}}} \text{ м/с} \approx 5 \text{ м/с}.$$

Здесь плотность воздуха равна $\rho \approx 1,3 \text{ кг/м}^3$. При $C_y = 5$ скорость полета была бы ниже: $v \approx 3,1 \text{ м/с}$.

Оценим теперь силу сопротивления, мешающую жуку двигаться в воздухе. Как всякая сила, она должна измеряться в ньютонах, следовательно, формула размерностей для нее будет та же, что и для подъемной силы. Но здесь существенно еще одно физическое явление – трение, связанное с вязкостью воздуха. Оно тем более важно, чем меньше движущееся тело и чем медленнее это тело движется.

Для оценки роли вязкости в аэродинамике вводится так называемое число Рейнольдса Re . Оно равно отношению аэродинамической силы к силе поверхностного трения, определяемого коэффициентом вязкости η . В нашем случае

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{1,3 \cdot 5 \cdot 0,01}{1,7 \cdot 10^{-5}} \approx 3800,$$

где вязкость воздуха равна $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$. При $v \approx 3,1 \text{ м/с}$ $Re \approx 230$. При таких числах Рейнольдса коэффициент лобового сопротивления сферы составляет $C_x \approx 1$. Используем его для оценки силы сопротивления жука:

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S_1.$$

Найдем площадь поперечного сечения: $S_1 = \frac{\pi L^2}{8} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$.
 Тогда $F_x = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$. При $v = 3,1 \text{ м/с}$ сопротивление ниже:
 $F_x = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$.

Работа, совершаемая против сил сопротивления, при перелете на расстояние $D = 1000 \text{ км}$ равна

$$A = F_x D = (2,5 - 6,2) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot 10^6 \text{ м} = (250 - 620) \text{ Дж},$$

что вполне соответствует энергетическим запасам жука. Время, затраченное на перелет, равно

$$T = \frac{D}{v} = \frac{1000 \cdot 10^3 \text{ м}}{(3,1 - 5) \text{ м/с}} = (2 - 3,2) \cdot 10^5 \text{ с} \approx 50 - 90 \text{ ч}.$$

Можно и потерпеть, когда впереди биологическая ниша!

Любознательный читатель может сделать свои оценки, исходя из других предположений и численных значений. Для тех, кто захочет оценить способность более мелких насекомых к дальним перелетам, приведем таблицу зависимости коэффициента лобового сопротивления сферы от числа Рейнольдса Re :

Re	C_x	Re	C_x	Re	C_x
0,05	480	1	27	20	2,6
0,1	235	2	15	50	1,6
0,4	64	5	7	100	1,1
0,8	34	10	4	$10^3 - 10^5$	≈ 1

БУЛАВА

С.Варламов

Как известно, гипербола — это не только геометрическая кривая, задаваемая определенным соотношением между координатами, но и литературный прием, позволяющий ярко и образно передать эмоциональное отношение говорящего (пишущего) к тому, о чем он рассказывает. От применения этого приема, правда, часто страдает здравый смысл. Как здорово, согласитесь, в разговоре звучит фраза: «Сто лет не виделись!» А вот несколько классических примеров гипербола. У Гоголя «...редкая птица долетит до середины Днепра». Один из литературных героев О'Генри, пребывая в плохом настроении, так пнул ногой поросенка, что тот полетел, опережая звук собственного визга. А в одной из сказок могучий богатырь бросил вверх булаву, которая вернулась на место... только через 40 дней!

Последняя гипербола легла в основу задачи, предлагавшейся на одном из Турниров юных физиков. В этой задаче нужно было оценить параметры знаменитого броска и подобрать материал для изготовления подходящей булавы.

Сорок дней — это больше, чем лунный месяц, следовательно, сказочная булава вылетела за пределы земной атмосферы со скоростью, чуть меньшей второй космической, и за время полета удалялась от Земли на расстояние, большее расстояния от Луны до Земли. Космическая фаза полета булавы — самая простая часть задачи, но не самая интересная. А вот разгон булавы от нуле-



Рисунок В.Бабаяева

вой до нужной скорости и ее полет в атмосфере представляют интерес и достойны детального рассмотрения.

Современные ракеты в начальной фазе полета в плотной атмосфере движутся медленно, постепенно увеличивая скорость, и приобретают максимальную скорость уже вне атмосферы. В отличие от ракет, булава не имела реактивного двигателя. Разгон булав от нулевой скорости происходил на отрезке пути, длина которого сравнима с ростом богатыря, поэтому максимальную скорость булава имела в тот момент, когда богатырь выпускал ее из рук, т.е. не очень высоко над поверхностью земли. В дальнейшем ее скорость на пути вверх только уменьшалась, но сохранила величину порядка 11 км/с на высоте 100 км (на этой высоте уже можно пренебречь сопротивлением атмосферы). Из какого же материала была изготовлена булава и каковы были ее размеры, если она преодолела сопротивление толщии земной атмосферы только за счет начальной кинетической энергии?

Если бы не было сопротивления при движении в воздухе, то подъем на высоту 100 км соответствовал бы уменьшению скорости, которое легко оценить, считая, что на этом пути булава двигалась с постоянным ускорением. Согласно закону сохранения механической энергии,

$$MgH + \frac{1}{2}Mv_H^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2.$$

Из этого соотношения следует, что начальная скорость булав v_0 должна была быть всего на 1% больше, чем скорость v_H на высоте $H = 100$ км. Иными словами, влиянием гравитации на пути булав через атмосферу можно смело пренебречь. Наблюдательные читатели, конечно же, не раз видели, как в ночном небе сквозь атмосферу пролетают и сгорают метеориты. Скорости относительно воздуха у метеоритов – пришельцев из космоса – составляют десятки километров в секунду. Заранее предупредим читателей, что наши оценки скорости булав тоже приведут к величине порядка 10 км/с. Такой скорости движения частиц воздуха (атомов и ионов кислорода и азота) при хаотическом движении соответствует температура около 10^5 градусов. Даже если принять температуру на порядок меньшей, т.е. 10^4 градусов, то все равно получается отнюдь не мало. Так что начальной тепловой энергией воздуха, очевидно, можно пренебречь.

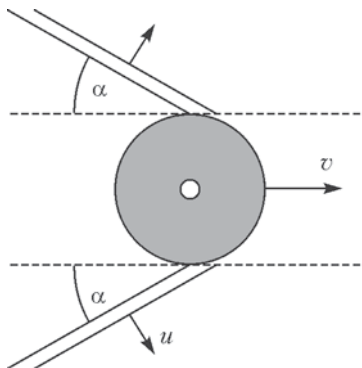
Рассмотрим упрощенную механическую модель движения плотного предмета в воздушной среде. Предположим, что булава имеет форму шара радиусом R и массой M . Пусть булава не разрушается при пролете через атмосферу. Оценим потери

кинетической энергии булавы и изменение импульса булавы, связанные с ее движением в воздухе.

Если за малое время Δt булава в воздухе прошла путь $b = v\Delta t$, то в движение пришел воздух, который до пролета булавы находился в объеме, примерно равном $\pi R^2 b$. Этот воздух не только приобрел кинетическую энергию, но и получил импульс, направленный в сторону движения булавы. Представим движение воздуха в виде кольцевой струи, срывающейся с булавы-шара. Такая струя характеризуется скоростью и углом, который скорость образует с направлением движения булавы. При дальнейшем движении эта струя создает звуковые волны в воздухе, и в конце концов вся полученная воздухом механическая и тепловая энергия переходит в энергию хаотического движения молекул воздуха (в тепловую энергию).

На рисунке показана эта самая кольцевая струя, срывающаяся с шара, но ее размеры, конечно, непропорционально велики.

Движение воздуха можно описывать такой струей только в непосредственной близости от шара. Вдали от шара формируется звуковая волна, имеющая форму конуса Маха с углом $\beta \sim \arcsin \frac{v_{\text{звука}}}{v}$. Сжатие воздуха при набегании его на шар происходит по так называемой «ударной адиабате». Если рассматривать движение в системе отсчета, связанной с булавой, то давление сжатого воздуха



вблизи поверхности булавы в середине набегающего на булаву потока равно динамическому давлению потока воздуха $\rho v^2/2$ (здесь ρ – плотность воздуха до пролета булавы). В кольцевой струе воздух (или то, во что он превратился после сжатия) имеет плотность, большую плотности воздуха, из которого была сформирована эта струя. Характер движения воздуха вблизи шара таков, что скорости его частиц имеют составляющие вдоль направления движения шара, сравнимые со скоростью шара. Исследование струи представляет собой отдельную интересную задачу, однако нам нужно оценить торможение булавы.

Итак, масса воздуха $\Delta m = \rho \pi R^2 v \Delta t$ пришла в движение со скоростью u , направление которой составляет с направлением скорости булавы угол $90^\circ - \alpha$. Запишем закон сохранения

импульса:

$$Mv_1 = Mv_2 + \rho\pi R^2 v \Delta t u \sin \alpha$$

и закон сохранения энергии:

$$M \frac{v_1^2}{2} = M \frac{v_2^2}{2} + \rho\pi R^2 v \Delta t \frac{u^2}{2} + Q,$$

где Q – это тепловая энергия, приобретенная сжатой и разогретой порцией воздуха, а также энергия излучения разогретого воздуха. При температурах порядка $10^4 - 10^5$ К излучение составляет малую долю, и им можно пренебречь. Скорости *хаотического* движения частиц в кольцевой струе вблизи шара имеют тот же порядок величины, что и скорость *направленного* движения частиц u . С учетом этого запишем

$$Q \sim \frac{5}{2} \rho\pi R^2 v \Delta t \frac{u^2}{2}.$$

Отсюда следует

$$M \frac{v_1^2}{2} = M \frac{v_2^2}{2} + \frac{7}{4} \rho\pi R^2 v \Delta t u^2.$$

Одновременное выполнение обоих законов сохранения обуславливает определенную связь между v , u и $\sin \alpha$:

$$u = \frac{4}{7} v \sin \alpha.$$

К сожалению, не так просто установить величину угла α . Нас интересует передача импульса воздуху. Охарактеризуем ее «усредненным» углом α , который, очевидно, меньше 90° , но сравним с $30 - 45^\circ$. Для оценки потери импульса шаром достаточно выбрать какую-нибудь конкретную величину угла α , например 30° . Тогда получаем

$$u = \frac{2}{7} v.$$

Воспользуемся законом сохранения импульса для этого соотношения между скоростями v и u и получим, что начальная v_1 и конечная v_2 скорости булавы связаны друг с другом так:

$$Mv_1 = Mv_2 + \frac{1}{7} \rho\pi R^2 v \Delta t v.$$

Иными словами, изменение скорости булавки описывается соотношением

$$v_2 - v_1 \approx -v \frac{\Delta m}{7M}.$$

Таким образом, скорость булавы при прохождении атмосферы меняется в соответствии с уравнением

$$dv = -v \frac{\Delta m}{7M}, \text{ или } v = v_0 e^{-\frac{m}{7M}}.$$

Конечная скорость на выходе из атмосферы зависит от полной массы воздуха m , приведенной в движение. (Заметим, что мы получили зависимость скорости булавы от двух масс, которая очень напоминает решение уравнения Мещерского для ракеты. Только там фигурируют начальная и конечная массы ракеты, а здесь – масса булавы и масса воздуха.) Эту полную массу можно легко оценить:

$$m \approx \pi R^2 \frac{\rho_{\text{атм}}}{g},$$

тогда

$$v_{2\text{косм}} = v_0 e^{-\frac{\pi R^2 \rho_{\text{атм}}}{7Mg}}, \text{ или } v_0 = v_{2\text{косм}} e^{\frac{\pi R^2 \rho_{\text{атм}}}{7Mg}}.$$

Полученная формула позволяет оценить начальную скорость булавы в зависимости от ее радиуса и массы. Предположим, что булава сделана из обедненного урана и покрыта прочной термостойкой оболочкой. Уран обладает весьма высокой плотностью: $\rho = 19040 \text{ кг/м}^3$. Выразим массу булавы через плотность и для начальной скорости получим

$$v_0 = v_{2\text{косм}} e^{\frac{3\rho_{\text{атм}}}{28\rho Rg}}.$$

Из этой формулы видно, что чем больше радиус булавы, тем меньше может быть ее начальная скорость. (С другой стороны, булава – это оружие, и для богатыря масса булавы не должна быть маленькой.) Пусть радиус урановой булавы равен 5 см. Тогда эта булава будет иметь массу порядка 10 кг и приобретет начальную скорость около 34 км/с, что примерно в три раза больше второй космической скорости. Это многовато даже для чемпионов мира по толканию ядра или метанию молота на дальность.

Оценим теперь силу F , с которой богатырь разгонял булаву, и давление, которое оказывалось на материал булавы. Пусть рост богатыря 2 метра. Это значит, что разгонный путь булавы L не превышает 3 метров. Поскольку

$$FL = M \frac{v_0^2}{2},$$

получим

$$F \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Н}.$$

Если распределить такую силу по площади поперечного сечения шара, то получится среднее давление

$$p \approx 2,5 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Это давление значительно больше предела прочности урана $\sigma \approx 3 \cdot 10^8 \text{ Па}$. Так что, скорее всего, урановая булава во время броска просто просочилась бы между пальцами богатыря.

Вот так: начали мы с предположения, что булава пролетела через атмосферу и приобрела на выходе в космос примерно вторую космическую скорость, а выяснили, что разогнать ее до нужной скорости невозможно по причине недостаточной прочности. Зато получили оценки величин для скорости: это примерно 30 км/с и для массы: порядка 10 кг. Тела такой массы и с такими скоростями действительно попадают в атмосферу Земли, но только не с ее поверхности, а из космоса. Это – крупные железные метеориты. При вертикальном падении через атмосферу такой метеорит у поверхности Земли будет иметь скорость около 5 км/с. А что будет после удара такого «молотка» по Земле – это уже другая история!

ХЕРУВИМЫ, СЕРАФИМЫ, САМОЛЕТЫ...

А.Стасенко

Уже в древности крылья и огонь считались необходимыми атрибутами всего, что летает. Например: «...вдруг явилась колесница огненная и кони огненные ...и понесся Илья в вихре на небо». Подобных свидетельств много в Священных Писаниях, но наиболее детальное (просто – поразительно подробное) описание крылатого летательного аппарата дано в книге Пророка Иезекииля. Приведем наиболее существенные цитаты из этой книги:

«И видел я ...облако наполнило внутренний двор.

...и Дом наполнился облаком, и двор наполнился сиянием славы Господа. И шум от крыльев херувимов слышен был даже на внешнем дворе, как бы глас Бога Всемогущего, когда он говорит.

И видел я: и вот четыре колеса подле херувимов, по одному колесу подле каждого херувима... И по виду все четыре сходны...

Когда шли херувимы, тогда шли подле них и колеса; и когда херувимы поднимали крылья свои, чтобы подняться от земли, и колеса не отделялись, но были при них.

У каждого – по четыре лица, и у каждого – по четыре крыла...

И видел я, и вот на своде, который над главами херувимов, как бы камень сапфир, как бы нечто похожее на престол, видно было над ними. И говорил Он...: войди между колесами под херувимов и возьми полную пригоршню горящих угольев...

И подняли херувимы крылья свои и поднялись в глазах моих от земли; когда они уходили, то и колеса подле них...

...И отошло от меня видение, которое я видел».

В свете этого свидетельства древнего пророка рассмотрим изображения самолетов только что ушедшего века (который вполне можно назвать веком авиации).

На рисунках 1–3 представлены летательные аппараты различных поколений. Полюбуйтесь деталями этих машин. Тут видны и «пары крыльев», и по «четыре лица» (воздухозаборни-



Рис. 1. Один из первых одноместных бипланов



Рис. 2. Штурмовик Сухого

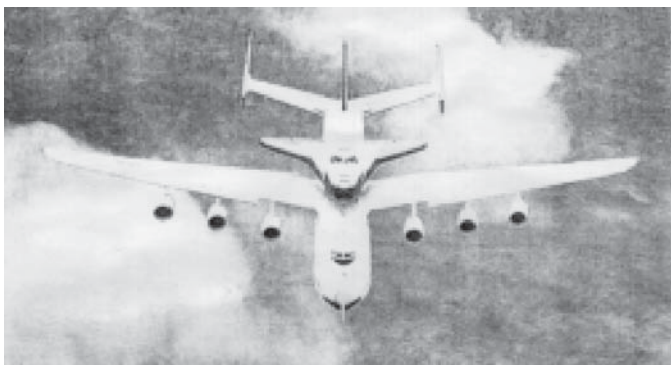


Рис. 3. Сверхтяжелый транспортный самолет «Мрия», транспортирующий «Буря»

ки двигателей), и колеса, и «сапфир» наверху (остекление кабины). Из всех этих элементов вполне можно «собрать» то, что видел Иезекииль (попробуйте сделать это – и вы получите удовольствие).

Конечно, для взлета этих аппаратов требуются весьма протяженные аэродромы. При разбеге по достижении определенной скорости подъемная сила превосходит вес (точнее – силу тяжести), и самолет отрывается от земли. В качестве платы за подъемную силу крыла выступает сила сопротивления. Обе эти составляющие аэродинамической силы F_a (рис.4) пропорциональны произведению ρv^2 , где ρ – плотность воздуха, v – скорость самолета, на некую площадь. Для подъемной силы естественно взять площадь крыла S , а для силы лобового сопротивления – площадь вертикального силуэта летательного аппарата S_{\perp} . Тогда

$$F_y \sim \rho v^2 S, \quad F_x \sim \rho v^2 S_{\perp}.$$

Отношение этих сил называется аэродинамическим качеством летательного аппарата:

$$K = \frac{F_y}{F_x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Прелесть крыла состоит в том, что это качество (у современных машин) составляет величину порядка 10–15. Значит, в горизонтальном полете двигатели должны создавать силу тяги $T = F_x$, на порядок меньшую веса летательного аппарата $G = F_y$, так что предыдущее равенство можно записать в виде

$$K = \frac{G}{T}.$$

Но в ряде случаев требуется посадка на небольшие площадки (в горах, на палубы качающихся кораблей...) И описанный Иезекиилем летательный аппарат мог сесть во двор храма только в том случае, если ему были доступны вертикальные посадка и взлет. Следовательно, это мог быть только аппарат с отклоняемыми соплами (с управляемым вектором тяги), как у современных нам самолетов Як-49 (Россия) или Харриер (Англия). После вертикального взлета «на струях» эти самолеты переходят в горизонтальный полет, становясь «на крыло». Качественно изменение силы тяги двигателей изображено на рисунке 5.

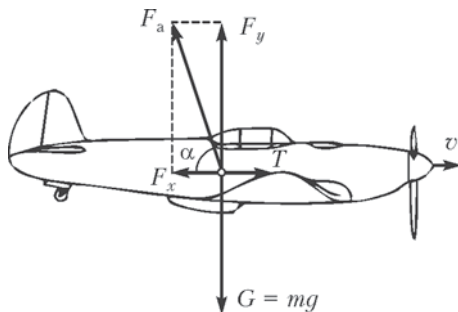


Рис. 4. Силы, действующие на летящий самолет

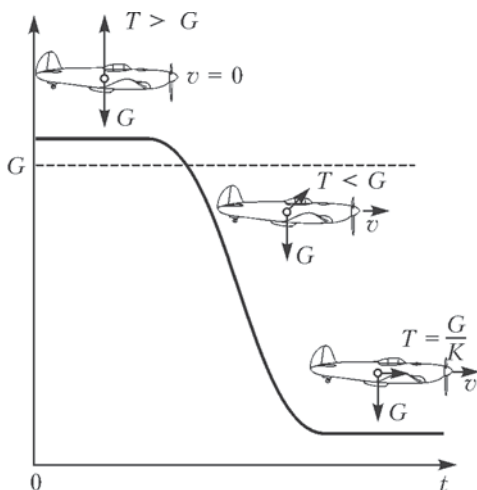


Рис. 5. Изменение силы тяги двигателей самолета со временем

Видно, что в режиме «висения» струи двигателей должны создавать поток импульса, не меньший веса самого летательного аппарата. Значит, давление на стартовую площадку, создаваемое струями, должно быть больше, чем нагрузка на крыло:

$$p_{\downarrow} \sim \frac{G}{N_c \pi r_c^2} > \frac{G}{S},$$

где N_c – число струй. Мало того, тут речь идет не только о давлении – струи пред-

ставляют собой высокоскоростной поток раскаленных газов, способных прожигать палубу авианосцев. Не случайно Иезекииль упоминает об углях под херувимами.

Но что такое многочисленные «очи», покрывающие всю поверхность херувимов? На определенном этапе развития авиации обшивка самолетов делалась из гофрированного дюралюминия, который обеспечивал жесткость конструкции. (В чем легко убедиться, собрав лист бумаги гармошкой – после этого его труднее согнуть.) Такой самолет выглядел «полосатым». С ростом скорости полета возникла проблема аэродинамического нагрева. И оказалось, что можно увеличить теплоотвод при помощи рельефного теплозащитного покрытия в виде кольцеобразных уступов, чередующихся по всей длине боковой поверхности летательного аппарата.

Итак, что же видел Иезекииль? Похоже, это был крылатый летательный аппарат вертикального взлета/посадки, который производил впечатляющий шум и оставлял под собою «горящие угли». Он обладал четырьмя реактивными двигателями и, конечно, колесами, которые больше всего потрясли Иезекииля. Габариты аппарата можно оценить сверху, учитывая, что из площади упомянутого двора (50×100 локтей, или 22×44 метра) нужно вычесть площадь храма («Дома», 20×60 локтей). Таким образом, этот летательный аппарат мог иметь характерные размеры порядка десятка метров.

ПРИНЦИП ТОРРИЧЕЛЛИ И ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА ИНЕРЦИИ

А.Буров

В средней школе почему-то очень «боятся» силы инерции. Как так – что это за сила, которая не хочет подчиняться третьему закону Ньютона? Тем не менее, каждому приходится сталкиваться с этой силой по многу раз на дню, и, вероятно, пришло время поговорить о некоторых ее «кажущихся» странностях.

Начнем с такой задачи.

Задача 1. *В горизонтальной плоскости на пружинке крутят камень с постоянной угловой скоростью ω . Найдите установившееся движение системы и исследуйте устойчивость этого движения, если длина пружинки в нерастянутом состоянии l , жесткость пружинки k , а масса камня m .*

Первое решение. В школе, вероятно, эту задачу стали бы решать так. Центробежное ускорение камня равно $a = -\omega^2 r$, где r – длина пружинки в растянутом состоянии. Знак «минус» указывает на то, что r отсчитывается от неподвижной точки, а центробежное ускорение направлено к этой точке. Далее, со стороны пружинки на камень действует сила упругости $F = -k(r - l)$, и радиус R установившегося движения (а им окажется равновесие относительно равномерно вращающейся с угловой скоростью ω системы отсчета) будет определяться из уравнения

$$-m\omega^2 r = -k(r - l).$$

Отсюда легко находим значение радиуса:

$$R = \frac{kl}{k - m\omega^2}.$$

Видно, что при $\omega = 0$ система не вращается, и длина пружинки равна l . При возрастании ω , до разумных пределов, знаменатель в выражении для R начинает уменьшаться, а само R – увеличиваться, что и соответствует нашему повседневному опыту. При неразумно больших значениях ω закон Гука для силы упругости

перестает выполняться, пружинка обрывается, а камень улетает – как правило, по касательной.

Относительно устойчивости найденного движения трудно сделать какие-либо определенные выводы.

Второе решение. Отважный, по крайней мере по отношению к центробежным силам инерции, человек стал бы решать эту задачу, возможно, так. Наблюдатель, равномерно вращающийся вместе с пружинкой с угловой скоростью ω , видит, что на камень действуют центробежная сила инерции $F_{\text{и}} = m\omega^2 r$ и упругая сила $F_y = -k(r - l)$, поэтому можно записать условие равновесия в виде

$$F_{\text{и}} + F_y = m\omega^2 r - k(r - l) = 0 ,$$

из которого получается то же самое значение радиуса R .

Более того, этот наблюдатель заметит, что как упругая сила, так и центробежная сила инерции – *потенциальны*, т.е. существуют функции $U_{\text{и}} = U_{\text{и}}(r)$ и $U_y = U_y(r)$ такие, что

$$F_{\text{и}} = -\frac{dU_{\text{и}}}{dr} \text{ и } F_y = -\frac{dU_y}{dr} .$$

Функции, подобные $U_{\text{и}}$ и U_y , физики называют потенциалами. В данном случае назовем их *измененными потенциалами* – для того, чтобы отличить от обычных потенциалов, остающихся даже тогда, когда исчезает вращение.

В силу того что потенциалы аддитивны, их можно и нужно складывать. У нас появился замечательный шанс воспользоваться принципом Торричелли, который в данной ситуации звучит так:

При устойчивом равновесии измененный потенциал $U = U_{\text{и}}(r) + U_y(r)$ достигает своего локального минимума.

В нашем случае

$$U_{\text{и}}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 , \quad U_y(r) = -\frac{1}{2}k(r - l)^2 .$$

Тогда уравнение относительного равновесия можно записать в виде

$$\frac{dU}{dr} = -m\omega^2 r + k(r - l) = 0 .$$

Неудивительно, что оно отличается от предыдущего уравнения равновесия лишь знаками.

Ну, а для проверки условий устойчивости мы вычислим вторую производную измененного потенциала:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -m\omega^2 + k,$$

которая положительна при всех тех же «разумно-умеренных» значениях угловой скорости, о которых говорилось раньше.

Итак, согласно принципу Торричелли, найденное относительное равновесие устойчиво. Иными словами, второй метод решения позволяет узнать о движении больше, чем первый «школьный» метод.

Теперь обратимся к решению другой задачи – частного случая известной задачи Кеплера.

Задача 2. Пусть N – светило, притягивающее некоторый камень с силой $F_N = -m\gamma/r^2$, где m – масса камня, r – его расстояние до светила, γ – положительная постоянная, равная произведению массы светила на постоянную ньютоновского тяготения. В предположении о том, что под действием ньютоновского тяготения камень совершает равномерное вращение вокруг светила с постоянной угловой скоростью ω в плоскости, проходящей через это светило, найдите радиус орбиты камня и исследуйте устойчивость его движения.

Первое «решение». У нас уже имеется опыт написания измененных потенциалов. Потенциал центробежной силы инерции снова равен $U_{\text{и}}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, а потенциал силы притяжения имеет вид $U_N(r) = -\frac{m\gamma}{r}$. Для определения установившегося движения запишем измененный потенциал $U = U_{\text{и}}(r) + U_N(r)$, найдем его первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dU}{dr} = -m\omega^2 r + \frac{m\gamma}{r^2} = 0.$$

Из этого уравнения получаем третий закон Кеплера:

$$\omega^2 r^3 = \gamma,$$

а из него – выражение для радиуса орбиты:

$$R = \left(\frac{\gamma}{\omega^2} \right)^{1/3}.$$

Что ж, неплохо. По крайней мере, радиус орбиты уже найден, и найден правильно.

Теперь с помощью принципа Торричелли разберемся с устойчивостью. Вторая производная потенциала имеет вид

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -m\omega^2 - \frac{2m\gamma}{r^3},$$

и мы с удивлением обнаруживаем, что она *всегда* отрицательна. Получается, что либо не работает принцип Торричелли, чего не может быть, так как он проверен на многочисленных примерах, либо орбиты планет стали неустойчивы, о чем страшно даже подумать.

В чем же проблема? Оказывается, что это решение не совсем верное, и именно поэтому мы поставили в подзаголовке слово *решение* в кавычках. Ну, а какое же решение правильное?

Второе, правильное решение. Дело в том, что мы не очень внимательно прочитали условие задачи и не почувствовали его отличия от предыдущего. В первой задаче пружинку с камнем *принудительно вращали* с постоянной угловой скоростью, в то время как во второй задаче камень *совершенно свободен* и в принципе может совершать движение с любой угловой скоростью. Такая замечательная свобода имеет далеко идущие последствия.

Так как физические свойства системы не меняются при повороте на произвольный угол вокруг притягивающего центра, то говорят, что имеет место симметрия, или что система инвариантна относительно поворотов. А это значит, что помимо закона сохранения энергии имеется еще один закон сохранения — кинетического момента, который в наших обозначениях принимает вид

$$mr^2\omega = p,$$

где p — постоянная. Таким образом, движение камня не такое уж и свободное — постоянная p зависит от того, как камень был запущен в начальный момент времени, и уже эта величина будет сохраняться в течение всего времени движения.

Так вот, оказывается, что при такой «свободной» постановке задачи потенциал центробежной силы инерции надо писать в виде

$$U_{\text{и}}(r) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{mr^2}.$$

Тогда для самой силы получаем

$$F_{\text{и}}(r) = -\frac{dU_{\text{и}}(r)}{dr} = \frac{p^2}{mr^3},$$

а подстановка в это выражение значения p из закона сохранения кинетического момента после небольших преобразований дает уже привычное выражение для центробежной силы как функции от угловой скорости ω .

Итак, нами получено первое утешение – выражение для центробежной силы инерции найдено правильно, т.е. первая часть предыдущего «решения» все же верна, закон Кеплера остается в силе, и все не так уж плохо. Остается разобраться с устойчивостью.

Дать ответ на этот вопрос теперь, после того как найдено еще одно выражение для потенциала центробежной силы, не так уж трудно. Запишем с помощью этого выражения суммарный потенциал, причем, чтобы отличать его от измененного потенциала, мы не только обозначим его другой буквой – W , но и назовем *приведенным потенциалом*:

$$W = U_n(r) + U_N(r) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{mr^2} - \frac{m\gamma}{r}.$$

Из равенства нулю его первой производной:

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{m\gamma}{r^2} = 0$$

мы немедленно найдем значение радиуса установившегося, в данном случае стационарного, движения:

$$R = \frac{p^2}{\gamma m^2},$$

которое, разумеется, тождественно найденному ранее значению.

Теперь для изучения устойчивости вычислим вторую производную функции W :

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{mr^4} - \frac{2m\gamma}{r^3}.$$

Но вычислить эту производную мало – надо в нее еще подставить только что найденное решение:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{m \left(\frac{p^2}{\gamma m^2} \right)^4} - \frac{2m\gamma}{\left(\frac{p^2}{\gamma m^2} \right)^3} = \frac{\gamma^4 m^7}{p^6} > 0.$$

Это означает, что кеплеровская круговая орбита устойчива по радиусу, и Вселенной не грозит уничтожение (в рамках сделанных предположений) в смысле существенных изменений радиусов орбит.

Вместе с тем, в задаче Кеплера нет устойчивости «по углу». Иными словами, два спутника, запущенные из близких точек и с близкими скоростями, вообще говоря, разбегутся, т.е. удалятся друг от друга, хотя радиусы их орбит будут оставаться близкими друг другу все время.

Задача Кеплера идеально «приспособлена» для ответа на этот вопрос с помощью только элементарных средств. В самом деле, хорошо известно, что в этой задаче траекториями могут быть лишь конические сечения, т.е. эллипс, парабола или гипербола. Рассмотрим, наряду с найденной круговой орбитой, другую близкую орбиту. Нетрудно сообразить, что эта орбита окажется эллиптической. Но для эллиптической орбиты выполняется соотношение $\omega^2 a^3 = \gamma$, где a – большая полуось эллипса (а в случае круговой орбиты – ее радиус). Ясно, что для наугад взятой эллиптической орбиты, близкой к рассматриваемой круговой, величина полуоси a не будет совпадать с радиусом круговой орбиты, да и орбитальная угловая скорость ω в общем случае будет слегка отличаться от угловой скорости при круговом движении. Вот эта разница в орбитальных угловых скоростях и определяет разбегание спутников по углу.

* * *

Какова же мораль из всего сказанного? Главное, что силы инерции, в данном случае центробежные силы инерции, не так уж страшны, как может показаться на первый взгляд. Их потенциальный характер позволяет не только находить установившиеся движения, но и исследовать их устойчивость. Это, как мы видели, посильно школьнику. Единственное, что надо уметь, так это отличать те случаи, когда систему принудительно вращают с постоянной угловой скоростью, от случаев, когда она вращается совершенно свободно.

ВОРОНА – ХВОСТОМ ВПЕРЕД?

В.Козлов

Возможно, проезжая в окрестностях какого-либо аэродрома (аэропорта) на электричке, поезде или автомобиле, вам приходилось наблюдать из окна удивительное зрелище. Самолет, взлетающий вдалеке или идущий на посадку почти параллельно дороге, как будто зависает в воздухе или даже начинает двигаться... хвостом вперед. (Здесь, конечно, речь не идет о самолетах вертикального взлета и посадки, для которых такое движение реально возможно.) Подобным же образом иногда выглядит из окна движущегося транспорта и полет птичьих стай или одиночных крупных птиц.

Попытаемся разобраться в причинах, вызывающих у наблюдателя такую иллюзию. Вы, наверное, припоминаете (если, конечно, наблюдали такой эффект), что во всех упомянутых выше случаях на переднем плане всегда находились какие-то крупные объекты: большие здания, деревья, кусты и т.п., а самолет или птицы летели далеко за ними, на заднем плане. И это – ключ для объяснения эффекта.

Однако сначала рассмотрим более простую ситуацию. Предположим, что движения лыжника, вороны и реактивного самолета происходят в одной и той же вертикальной плоскости с постоянными скоростями. Высоты полета вороны и самолета также не изменяются. Пусть в некоторый момент времени t_0 , как условно показано на рисунке 1, самолет (точка C) находится в

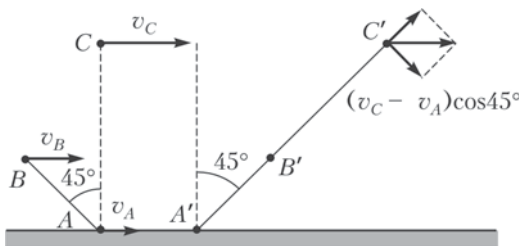


Рис. 1

зените относительно лыжника (точка A), а угол между направлениями на самолет и на ворону (точка B) равен 45° , причем ворона летит позади лыжника. Спустя некоторое время Δt лыжник, ворона и самолет (соответственно, точки A' , B' и C') оказываются на одной прямой, образующей с вертикалью угол 45° . А это означает, что скорость углового перемещения по небосводу относительно лыжника у вороны больше, чем у самолета.

Определим отношение мгновенных угловых скоростей вороны и самолета относительно лыжника для этого момента времени. Мгновенная угловая скорость равна проекции относительной скорости вороны $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ или самолета $\vec{v}_C - \vec{v}_A$ на нормаль к радиусу-вектору соответствующей точки, деленной на длину этого радиуса-вектора:

$$\omega_B = \frac{(v_B - v_A) \cos 45^\circ}{A'B'} = \frac{(v_B - v_A) \cos^2 45^\circ}{h_B},$$

$$\omega_C = \frac{(v_C - v_A) \cos 45^\circ}{A'C'} = \frac{(v_C - v_A) \cos^2 45^\circ}{h_C},$$

где v_A – скорость лыжника, h_B и h_C – высоты полета вороны и самолета соответственно. По условию рассматриваемой задачи,

$$h_B = \frac{(v_B - v_A) \Delta t}{2 \operatorname{tg} 45^\circ}, \quad h_C = \frac{(v_C - v_A) \Delta t}{2 \operatorname{tg} 45^\circ}.$$

Тогда для отношения угловых скоростей получим

$$\frac{\omega_B}{\omega_C} = 2.$$

Таким образом, несмотря на то что характерная скорость вороны значительно меньше скорости реактивного самолета, ее скорость углового перемещения по небосводу, с точки зрения движущегося лыжника, в конкретной ситуации оказалась в 2 раза больше соответствующей угловой скорости самолета. И у бегущего лыжника создается впечатление, что ворона перемещается по небосводу быстрее самолета. Причина этого – в существенной разнице в высотах полета птицы и самолета.

Вернемся теперь к проблеме «зависающего или движущегося хвостом вперед» самолета. Действие, конечно, происходит в трехмерном пространстве. Однако для простоты можем предположить, что векторы скоростей самолета и наблюдателя параллельны друг другу и направлены в разные стороны. В этом случае относительное движение можно анализировать в плоскости, которой принадлежат оба вектора скорости. Такое допущение

ние не отразится принципиально на заключительных выводах. Так же, как и в предыдущем случае, для объяснения эффекта решающее значение имеет отношение скоростей углового перемещения объектов относительно наблюдателя. Мгновенные относительные угловые скорости предметов, находящихся на переднем плане (деревьев, кустов, домов и т.п.), могут значительно превышать скорость углового перемещения самолета относительно движущегося наблюдателя.

Рисунок 2 схематично поясняет, как возникает иллюзия «летающего хвостом вперед» самолета. Движущийся (например, в автомобиле) наблюдатель сначала увидит самолет (точка 1) перед ближним к нему объектом (деревом). Затем самолет может быть закрыт на короткое время от наблюдателя этим объектом. По истечении еще некоторого времени наблюдатель снова увидит самолет (точка 2), но с другой стороны от находящегося перед наблюдателем объекта (деревя). Заведомо зная, что дома, деревья и т.п. неподвижны, наблюдатель воспринимает видимые изменения положения самолета относительно таких объектов как его движение «хвостом вперед». Этому может также благоприятствовать значительная удаленность самолета от наблюдателя. В этом случае направление на самолет со временем изменяется очень мало, а расположенные вблизи дороги крупные объекты «проносятся» за окном движущегося транспорта с относительно большой угловой скоростью.

Однако воспринимаемый человеком любой зрительный образ не является вполне объективным отражением реальной действительности. Дело в том, что в формировании воспринимаемого образа активно участвует мозг. Он «подправляет» поступающую к нему зрительную информацию за счет известных фактов. В частности, из повседневного опыта человеку известно, что дома, деревья или кусты не могут перемещаться по неподвижной поверхности земли. Поэтому при наблюдении за летящим вдали самолетом наш мозг, обрабатывая поступающую зрительную информацию, «автоматически» оценивает перемещения самолета относительно заведомо для него неподвижных на переднем плане объектов. И тогда, вследствие объективно меньшей относительной угловой скорости, возникает иллюзия зависающего в воздухе или летящего назад («хвостом вперед») самолета.

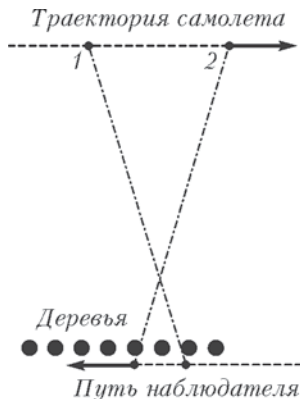


Рис. 2

ФИЗИКА ВНУТРИ АВТОБУСА

В.Котов

Хорошо известно, что многие явления окружающей нас действительности имеют физическую природу. Мы каждый день сталкиваемся с ними, не обращая на это внимания. Рассмотрим, например, некоторые физические явления, а именно – механические, которые может наблюдать пассажир автобуса.

Привычные чудеса в движущемся с ускорением автобусе.

Происходящее вокруг мы обычно объясняем, связывая себя с неподвижной относительно земли основой. Но немалую часть своей жизни мы проводим в транспорте, в частности в автобусе. Применимы ли привычные нам объяснения для явлений, происходящих в движущемся транспорте? Проверим это.

Пройдем в салон стоящего на остановке автобуса. Оглянемся. Капли с мокрого зонта достигают пола точно под местом отрыва, а образующаяся лужица растекается по полу одинаково по всем направлениям. Ничего необычного (пока автобус стоит) нет. В каждом явлении четко прослеживаются причина и следствие. Изменение положения или скорости тел обусловлено известными реальными силами. Если действие сил на тело уравновешено, то тело покоится или движется по инерции, т.е. прямолинейно и равномерно. В этом состоит закон инерции. В стоящем автобусе он действительно выполняется.

Но вот автобус тронулся и стал набирать скорость – тотчас пассажиров и все находящиеся в салоне предметы стало «увлекать» назад, против направления ускорения и движения. Капли теперь падают не под местом отрыва, а позади него. Рассыпанные яблоки катятся по полу уже не одинаково во все стороны, а преимущественно назад. Сидящие пассажиры почувствовали, как их вдавило в стенки сидений, а стоящие – как их потянуло назад. Однако когда движение автобуса стало равномерным, необычные явления в нем прекратились. Все внутри салона теперь происходит так, что создается полное подобие остановки автобуса (если не считать тряски и мелька-

ния пейзажа за окном). Затем автобус стал подъезжать к остановке, и необычные отступления от привычных явлений снова возникли при торможении автобуса. Теперь пассажиры и находящиеся в салоне предметы «потянулись» вперед, против направления ускорения.

Для внешнего наблюдателя (скажем, пешехода) все описанное – результат ускоренного движения автобуса и инертности находящихся в нем тел. Стенка сидения, пол ускоряющегося автобуса воздействуют на пассажира (а не наоборот, как ему кажется), увлекая его. Свободные же предметы сохраняют прежнее положение относительно земли, поэтому они начинают двигаться ускоренно относительно корпуса автобуса.

С точки же зрения пассажира автобуса, чьи наблюдения ограничены стенками салона, происходящее выглядит загадочно и необычно, тем более что источник странных явлений внутри автобуса не обнаруживается.

Попробуем разобраться.

В ускоряющемся автобусе закон инерции не выполняется – все тела, не связанные с корпусом автобуса, приобретают одно и то же ускорение, равное и противоположное по направлению ускорению автобуса. Это позволяет ввести приложенные ко всем телам в автобусе ускоряющие силы, как будто автобус попал в ускоряющее поле сил. Такие силы равны произведению массы каждого тела на ускорение системы и направлены против этого ускорения – их называют силами инерции. С помощью сил инерции объясняются все описанные выше «чудеса» в салоне автобуса.

Наложение на поле тяготения поля сил инерции создает новое поле со своими «горизонталью» и «вертикалью», отличными от земных (рис.1). Важно подчеркнуть, что для каждого тела внутри ускоряющегося автобуса одинаковы отношения модулей сил тяжести F_T и инерции $F_{ин}$, а также угол между ними. Поэтому для всех этих тел направление результирующей силы \vec{F} одно и то же.

Теперь мы можем объяснить некоторые удивительные наблюдения пассажира автобуса.

Пол уходит из-под ног.

Когда автобус замедляет

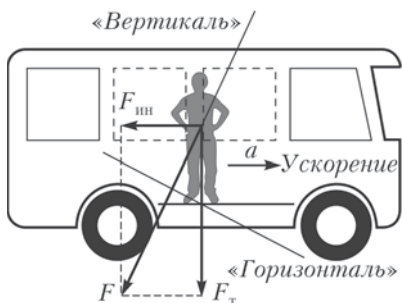


Рис. 1

ход, пассажиру кажется, что пол как бы идет вниз, если человек шагает вдоль салона в направлении движения автобуса, и восходит вверх, если он идет в обратном направлении. А при разгоне автобуса от остановки пол как бы наклоняется в сторону, противоположную движению. Это можно объяснить тем, что на пассажира действуют приложенные в его центре масс сила тяжести и сила инерции, а их равнодействующая совпадает по направлению с новой вертикалью в системе отсчета, связанной с автобусом (см. рис.1).

Проанализировав действующие на пассажира в автобусе силы, можно указать приемы сохранения пассажиром устойчивости без помощи рук. Действительно, условием устойчивости тела, имеющего площадь опоры, является пересечение действующей на тело силы с площадью опоры. Если эта сила выходит за пределы площади опоры, то под ее действием тело пассажира опрокидывается. Противодействовать этому можно, расставив ноги пошире или отставив ногу в сторону, противоположную ускорению. Пассажир также может сохранить равновесие, наклонив при этом туловище так, чтобы «ось» тела совпала с новой вертикалью (даже соединив при этом ноги). А чтобы устоять в салоне автобуса, испытывающего ускорение и толчки во всех направлениях, нужно расставить ноги вдоль одной, например продольной, оси салона (x), препятствуя продольным отклонениям, а руки развести в перпендикулярном направлении (y) и держаться за поручни (рис.2).

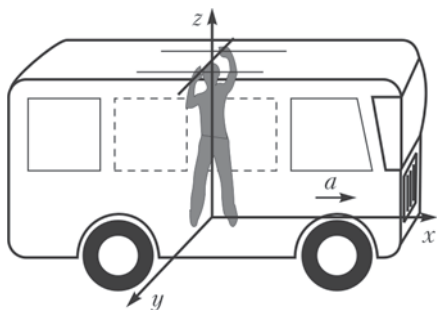


Рис. 2

Убедиться в изменении положения горизонтали в движущемся с ускорением автобусе можно, проделав простой опыт. Возьмите тарелку с какой-нибудь вязкой жидкостью, например с маслом или глицерином

(можно взять пластмассовый стаканчик со сгущенным молоком), и неравномерно двигайте ее по столу. Жидкость будет выливаться через задний край тарелки при резком трогании с места и приливать к переднему краю при прекращении движения. Причем плоскость поверхности жидкости всегда перпендикулярна результирующей силе, полученной сложением сил тяжести и инерции, приложенных к частицам жидкости.

Неприятное происшествие. Представьте, что в автобусе кто-то наступил вам на ногу. Кто виноват?

С вашей (автобуса) точки зрения, разумеется, виноват этот «кто-то». И это верно, если все произошло в стоящем автобусе. Но в автобусе, движущемся с ускорением, нужно учитывать, что на каждое тело действует сила инерции, а управляет ею, точнее ускорением, водитель автобуса.

Рассмотрим происходящее с точки зрения пешехода (земли). Из-за малого взаимодействия с корпусом автобуса и инертности своего тела туловище пассажира при ускорении автобуса продолжает сохранять прежнее положение относительно земли, тогда как его ноги вместе с полом автобуса перемещаются ускоренно. Поэтому тело пассажира смещается относительно салона при резком торможении – вперед, а при рывке – назад. Таким образом, водитель автобуса, подобно фокуснику, может перемещать пассажиров в салоне автобуса, не прикасаясь к ним и помимо их желания. Чем он часто и пользуется: если из-за скопления людей не закрывается задняя дверь, водитель резко тормозит, а если пассажиры скопились на передней площадке – делает рывок. Получается, что с водителя, в первую очередь, и нужно спрашивать за отдаленную ногу.

Случай с пассажиром. Приходилось ли вам наблюдать за человеком, неосторожно потерявшим связь с корпусом автобуса во время ускоренного движения последнего? С точки зрения других пассажиров, он попадает во власть силы инерции. Подобно листку, сорванному с дерева и гонимому ветром, человек стремительно перемещается вдоль салона, ища за что бы ухватиться. И вот это ему удалось: его протянутая рука судорожно вцепилась в вертикальную стойку поручней автобуса, мимо которой его тащит сила инерции. Ухватившись, пассажир ожидает остановки своего движения, но вместо этого он совершает оборот вокруг стойки и со всего размаху налетает на стоящих рядом пассажиров. Почему так происходит?

Сила, действующая на пассажира со стороны стойки поручней, в нашем случае перпендикулярна направлению движения тела. Поэтому, изменив его скорость по направлению, стойка не может изменить величину скорости. Переводя прямолинейное движение во вращательное, она выполняет роль центростремительной силы. Зависящая от скорости кинетическая энергия поступательного движения переходит в энергию вращательного движения ... со всеми вытекающими отсюда последствиями.

НАБЛЮДЕНИЯ В «НЕФИЗИЧЕСКОМ» МИРЕ

А.Усольцев

Почему взрослые запрещают детям играть в компьютерные игры столько, сколько хочется? Возможно, из зависти – ведь в их молодые годы солдатики были только пластмассовые или оловянные, они и подумать не могли о том, чтобы управлять почти что живыми армиями, бегать с гравитационной пушкой и «крошить» всякую там нечисть. В общем, реальность никакого сравнения с виртуальным миром не выдерживает.

Но давайте задумаемся: а так ли уж интересно, если при прыжке вниз наш герой ни с того ни с сего вдруг полетит вверх или если выпущенная пуля, вместо того чтобы поразить врага, станет летать по кругу? Наверное, любая самая увлекательная компьютерная игра становится интересной тогда, когда на ее фантастический сюжет накладываются физические закономерности окружающего мира, которые и придают правдоподобность нашим удивительным приключениям. Конечно, монстры чем страшнее, тем лучше, но физика и в игре должна быть физикой.

Попробуем через окно нашего монитора увидеть физические закономерности удивительного электронного мира.

Вот перед нами игра – автосимулятор «Underground 2» (или другая аналогичная игра). В этой игре, как и в реальной жизни, многое зависит от технического совершенства нашего автомобиля, поэтому много усилий и денег мы потратим на «покупку» запчастей. Для начала купим для машины маховик большей массы и установим его. Теперь наш автомобиль меньше трясет, но скорость он набирает медленнее, так как инерционность маховика не позволяет создавать большое ускорение. Установка регуляторов давления позволяет экономить топливо, а значит, экономить деньги и время на заправку. Обязательно покупаем новые шины, что сразу улучшает сцепление с дорогой.

Можно сказать, что мы вошли во вкус. Однако пробежимся по всему перечню товаров: фильтры топлива, новые тормозные колодки,..., *недостаток* мощности!? Зачем же мне покупать себе своими руками недостаток мощности? Может, это связано с

издержками перевода текста игры с английского на русский? Хорошо, пусть это будет *избыток* мощности, но зачем мне избыток мощности? Вот *увеличение* мощности автомобиля для гонки нам не помешает. Только в реальности нельзя купить абстрактное увеличение мощности, оно достигается лишь путем материальных изменений машины или топлива к ней.

Тут мы и выявили первое несоответствие игры и реальной жизни. Да, в жизни оказывается все намного сложнее.

Давайте теперь немного постреляем, благо в виртуальной жизни мы не чувствуем боли, да и жизнью у нас много... Итак, мы в мире игры «Half Life 2», где помогаем повстанцам победить диктатора и страшных зомби с пауками на голове.

Вот груз, который может качаться на веревке. Толкнем его, измерим время, за которое груз совершит десять колебаний, найдем период колебаний T , затем оценим длину веревки L и по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ подсчитаем ускорение свободного падения g . Получается результат, близкий к величине реального, земного ускорения свободного падения. Надо же, мелочь – а приятно.

Пойдем дальше. Перед нами водоем. Бросим что-нибудь в воду. Видно, что тела, брошенные в воду, ведут себя в соответствии со своими реальными прототипами – деревянные тела «плавают», а стальные «тонут». Тоже неплохо. Что-то, правда, есть в воде странное, нереальное... Ладно, потом разберемся.

Здорово, что мы можем брать разные предметы (банки, коробки), помещать их на любые горизонтальные поверхности (стол, стул, ящик и т.д.), а затем стрелять по ним из различных имеющихся видов оружия. Попробуем использовать это для того, чтобы осуществить виртуальный физический эксперимент по оценке скорости вылета пули из имеющегося у нас пистолета. Для этого мы выстрелим «в упор» из пистолета в ведро, поставленное на некоторой высоте. Измерив высоту ведра над землей и расстояние, на которое отлетает ведро, мы оценим его начальную скорость. Затем, оценив массы ведра и пули, найдем скорость пули.

Первая проблема, с которой мы сталкиваемся в виртуальном компьютерном мире, связана с определением расстояния «на глаз». Для решения этой проблемы необходимо найти эталон длины, имеющий аналоги в реальности. В качестве такого «эталона» мы возьмем высоту бочки, так как в нашей виртуальной среде не составляет труда найти две такие бочки (на одну мы поставим ведро, а второй бочкой будем измерять расстояние).

Вторая проблема возникает тогда, когда мы пытаемся определить место падения ведра, так как ведро отскакивает и катится довольно далеко, а «след» от его первоначального падения на виртуальной «земле» быстро исчезает. Для фиксации точки падения ведра разместим на земле различные предметы, по которым визуально будем определять место удара ведра о поверхность. В качестве таких предметов мы использовали разный подручный «мусор»: пустые коробки, канистры, банки, которые валяются в игре на каждом шагу (что не очень хорошо характеризует обитателей этого мира).

Теперь приступаем к сборке «экспериментальной установки». Найдём ровную горизонтальную площадку и поставим бочку, а на нее осторожно установим ведро. Далее, в направлении предполагаемого отлета ведра выкладываем найденные нами предметы на расстоянии друг от друга в одну «эталонную бочку». В результате проведенной достаточно трудоемкой работы «организованная» нами виртуальная реальность выглядит так, как показано на рисунке 1. Затем мы стреляем в ведро и смотрим, возле какого предмета оно упало. Из-за большой



Рис. 1

скорости ведра это бывает сделать достаточно сложно. Поэтому фрагмент выстрела и последующего полета целесообразно записать (мы делали это с использованием программы «Fraps»), чтобы иметь возможность неоднократного просмотра. После чего берем реальный прототип виртуального «ведра» и взвешиванием находим его массу, которая оказывается равной $M = 1,4$ кг. Массу пули оцениваем в 10 г, которые фигурируют в большин-

стве физических задач про огнестрельное оружие: $m = 10$ г. Так как ведро упало около коробки, положенной на расстоянии четырех длин бочки, оцениваем дальность его полета: $L = nH$, где $n = 4$, а H – высота бочки, которую мы будем считать равной 1,2 м.

Записываем условие задачи и решаем ее. Время свободного падения ведра равно $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, начальная горизонтальная скорость ведра составляет $u = \frac{L}{t} = \frac{nH}{t} = n\sqrt{\frac{gH}{2}}$. По закону сохранения импульса находим скорость пули v :

$$mv = Mu, \quad v = \frac{Mu}{m} = \frac{Mn}{m} \sqrt{\frac{gH}{2}} = 1400 \text{ м/с}.$$

Полученный результат вызывает сомнения – не слишком ли велика скорость пули?

Проверим, будут ли действовать выявленные нами закономерности для другого тела. Для этого повторим опыт, но вместо ведра возьмем ванночку, которая весьма кстати лежала рядом с найденным нами ведром. Опыт показывает, что ванночка отлетает на расстояние вдвое меньше, чем ведро. Определение массы ванночки при найденном нами значении скорости пули дает результат около 3 кг, близкий к реальному. Это свидетельствует о том, что скорость вылета пули из пистолета является постоянной при взаимодействии пули с любыми другими объектами в игре. Стрельба из разных видов оружия показывает, что скорость вылета пуль из них различны.

Таким образом, можно сказать, что при создании физической модели игры ее разработчики присваивали различным видам оружия различные значения скорости, а разным телам – разные массы, соответствующие массам их реальных прототипов.

Следующее виртуальное исследование свяжем с изучением свойств оружия, не имеющего пока аналогов в реальной действительности, которое мы условно назовем «силовой пушкой» (СП). Такая «пушка» позволяет притягивать к себе любые предметы, а затем «стрелять» этими предметами с достаточно большой скоростью. Попробуем оценить эту скорость.

Для этого будем использовать металлические диски от циркулярной пилы, почему-то в избытке «валяющиеся» во всех зданиях (что еще раз характеризует жителей этого мира, как людей неряшливых и странных). Притянем «пушкой» один из таких дисков, отойдем от деревянной стены на расстояние

примерно два метра, а затем выстрелим из пушки в эту стену по возможности в горизонтальном направлении. Диск воткнется в стену. Отойдем еще на два метра от стены (эти точки мы заранее отметили пустыми банками) и выстрелим другим диском тоже горизонтально. Понятно, что второй диск должен воткнуться в стену ниже первого, что мы действительно и наблюдаем (рис.2).

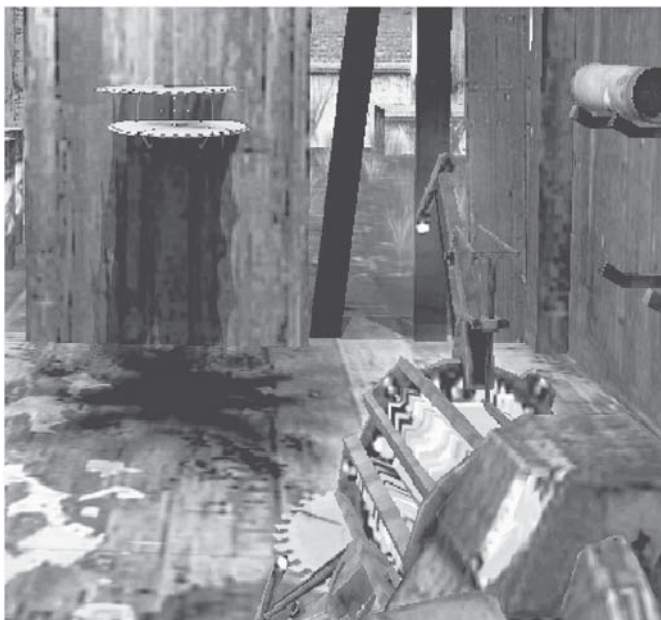


Рис. 2

По расстоянию Δy между дисками и расстояниям x_1 и x_2 до стены при двух выстрелах оценим скорость v_0 вылета дисков из нашей СП:

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad y_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \quad y_2 = \frac{gt_2^2}{2}, \quad x_1 = v_0 t_1, \quad x_2 = v_0 t_2,$$

откуда находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(x_2^2 - x_1^2)}{2\Delta y}}.$$

Подставим оценочные данные виртуального эксперимента: $x_1 = 2$ м, $x_2 = 4$ м, $\Delta y = 0,2$ м и получим начальную скорость: $v_0 = 17$ м/с. Это значение оказывается меньше ожидаемого, так как визуальнo скорость представляется очень большой. Но если

мы выйдем на «улицу» и выстрелим горизонтально, то визуальная оценка дальности полета (не более 20–30 м) подтверждает правильность оценки начальной скорости.

В дальнейшем можно оценить высоту зданий, стараясь «забросить» различные предметы на их крышу, или поэкспериментировать с телами разной массы (начальная скорость выстрела которых из СП оказывается постоянной и не зависящей от массы) и так далее.

А мы теперь зайдём в подвал, часть которого залита водой. Вода в подвале достаточно чистая и прозрачная, но что-то кажется в этой картинке неправильным. Точно – труба, которая уходит под воду! Луч, идущий из воды, должен испытывать преломление, и поэтому труба должна казаться «кривой». Но искривления не видно. Да, не предусмотрели разработчики игры выполнение закона преломления света.

Вот мы и выявили ещё одно несоответствие игры и реальной жизни. Никогда бедные жители этого неряшливого мира не увидят в небе радугу, не полюбуются на лунную дорожку, убегающую в море... В жизни все оказывается не только намного сложнее, чем в игре, но и намного интереснее.

ПОЧЕМУ ОНИ ЛЕТАТ СТРОЕМ

В.Вышинский

Мой дед рассказывал, что солдаты во время долгих ночных переходов умудрялись спать на ходу в строю... Они делали это по очереди, опираясь на соседа. Может быть, именно поэтому птицы, совершая дальние перелеты, соблюдают строй, летя «пеленгом» или «клином»? Наверное, в этом есть резон, однако имеются и другие причины.

Известно, что птицы экономят энергию при полете строем. Действительно, данные телеметрии показывают, что в этом случае частота сердечных сокращений снижается по сравнению с одиночным полетом. Об этом же говорят и данные летных экспериментов при полете самолетов «пеленгом», когда, например, левое крыло последующего самолета находится в восходящем потоке правого концевой вихря предыдущего самолета. Так, при полете истребителей с интервалом около 90 м экономия топлива второго самолета из-за снижения сопротивления составляет 10–20% (в зависимости от высоты полета), что позволяет увеличивать дальность полета второго самолета на 180–230 км. Специалисты NASA работают над проектом, в котором автоматическая система управления, используя глобальную спутниковую позиционную систему, позволяющую определять положение самолета с точностью до 10 см, должна формировать устойчивый строй самолетов.

Для объяснения физики явления сначала отметим тот факт, что в ядре вихря давление падает и это падение давления может быть весьма существенным. Оно организует вращательное движение воздуха, являясь источником центробежной силы. Смерч (торнадо) поднимает автомашины, срывает крыши с домов, а вихревой след самолета подобен двум горизонтальным торнадо. Такое образное сравнение придумали американцы, которым, в силу особенностей природных условий, часто приходится иметь дело со смерчами в обыденной жизни. Разрежение в ядре вихря можно «увидеть». Всплеск весла – и от кромок его лопасти отходит пара вихрей. В их центрах

падение гидростатического давления приводит к образованию воронок на воде.

Теперь поговорим о вихревой системе самолета. При определенных условиях на большой высоте виден вихревой след самолета. Он может быть «живым», и вы видите, как он извивается. Это происходит тогда, когда частицы, «трассирующие» след, движутся вместе с вихрями. Бывает и так, что вихри, сформировав след, уходят вниз, а след долго сохраняется в атмосфере, «курчавясь» под действием атмосферной турбулентности. «Трассером» является водный конденсат продуктов сгорания двигателей. Вихри, имея разрежение в ядрах, засасывают в себя микрокапли этого конденсата, делая след видимым.

Вихри в следе за крылом имеют противоположные направления вращения: правый (если смотреть сзади на пролетевший самолет) вращается против часовой стрелки, левый – по часовой стрелке (рис.1). Вихри не могут просто так обрываться в

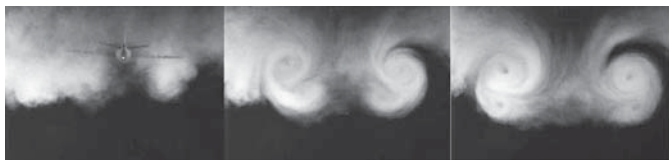


Рис. 1. Вихревая пелена за крылом сворачивается в пару вихрей

атмосфере – они либо заканчиваются на твердой поверхности, либо уходят на бесконечность. Вокруг крыла организуется циркуляционное движение, такое, что в первом приближении его вихревую систему можно смоделировать П-образным вихрем (рис.2). Крыло как бы разрезает атмосферу, оставляя «надрез»



Рис. 2. Вихревая схема крыла в первом приближении

в виде пары вихрей. При этом создается дополнительная сила сопротивления. Работа против этой силы равна кинетической энергии порожденного вихревого движения.

Есть различные экспериментальные устройства, снабженные измерительными приборами, которые позволяют измерять поля скоростей и давлений. Так, в аэродинамических и гидродинами-

ческих трубах движется поток, а исследуемая модель и измерительное оборудование неподвижны. В скоростных трассах, гидроканалах и катапультных установках модель движется в неподвижной среде, а измерители установлены на модели или в контрольном сечении (пример дымовой визуализации приведен на рисунке 1). Есть еще летный эксперимент, но он дорог и не всегда безопасен. Иногда удается провести исследования «даром» – надо только быть достаточно любознательным и иметь под рукой фотоаппарат, а интересное можно увидеть, например, даже в кино (рис.3; здесь отчетливо видно вращательное движение воздуха в следе за правым крылом). Опыты и наблюдения



Рис. 3. Кадр из фильма «Крепкий орешек»

расскажут очень многое пытливому исследователю: качественно все процессы, связанные с образованием подъемной силы, можно увидеть вооруженным или невооруженным глазом.

Итак, заменим вихревую систему самолета П-образным вихрем (такая упрощенная схематизация использовалась на заре авиации, используется и сейчас в учебных курсах на начальном этапе изучения аэродинамики самолета). Наличие свободных вихрей приводит к скосу потока в области крыла (в нашей схематизации – присоединенного вихря) и к повороту вектора аэродинамической силы \vec{F} на некоторый угол α (рис.4). Теперь уже сила не перпендикулярна набегающему потоку, а имеет

составляющую \bar{X}_i против направления полета, которая называется индуктивным сопротивлением. Чем интенсивнее свободные вихри и чем меньше размах крыла, тем больше скос и выше индуктивное сопротивление.

Посмотрим теперь, что происходит, когда самолеты находятся в возмущенном потоке. Если самолеты расположены «пеленгом», то скос потока в области конца крыла последующего самолета будет меньше, а значит, индуктивное сопротивление на этой части крыла будет ниже.

Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть случай полета «клином» — здесь выигрыш будет достигаться для двух последующих самолетов.

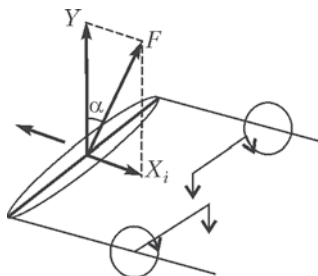


Рис. 4. Схема возникновения индуктивного сопротивления

КАК СТУДЕНТ ДУМАЛ ЗЕМЛЮ ОСТАНОВИТЬ

А.Стасенко

*Бывает, что усердие
превозмогает и рассудок.*

Козьма Прутков

Однажды под утро подумалось студенту: есть же на Земле такие счастливые места, где ночь длится полгода! И тут пришла ему в голову Идея: остановить вращение Земли – чтобы утро вообще не наступило. Ведь повернута же Луна к нам только одним своим полушарием.

Понятно, что затормозить вращение можно, например, при помощи реактивной силы выбрасываемой массы. Но какую массу для этого придется выбросить в космос? С какой скоростью? И вот, чтобы не утруждать себя деталями, в «тонком полусне» Студент сделал простые численные оценки.

Ясно, что искомую массу Δm нужно выбрасывать симметрично относительно оси вращения – чтобы не изменить движение центра масс Земли. И, конечно, противоположно направлению ее окружной (линейной) скорости V_0 . Например, так, как изображено на рисунке 1, где N – северный полюс, а u – искомая скорость выброса относительно Земли. В системе неподвижных

звезд скорость выброса будет равна $u - V_0$.

Для того чтобы выброшенная масса не возвратилась, ее скорость на бесконечном удалении от Земли должна по крайней мере обратиться в ноль. Значит, там равна нулю ее кинетическая энергия. Но и потенциальная энергия Π там тоже равна нулю – см. рисунок 2, где $-g_0 R_0$ это потенциальная энергия единицы массы на поверхности Земли. Следова-

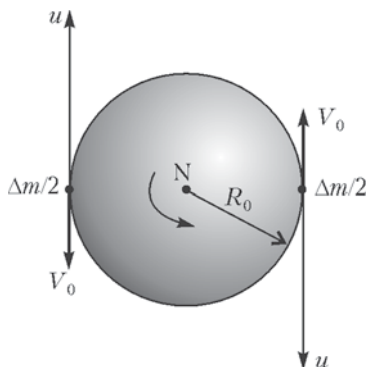


Рис. 1

тельно, закон сохранения полной механической энергии единицы массы можно записать в виде

$$\frac{(u - V_0)^2}{2} + (-g_0 R_0) = 0 + 0.$$

Отсюда находим

$$u = \sqrt{2g_0 R_0} + V_0.$$

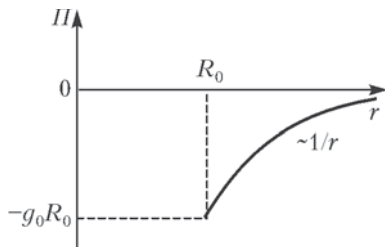


Рис. 2

«Конечно, это только оценка, — успокоил себя Студент, — ведь в процессе выброса будет изменяться и масса Земли, и ее радиус, и, следовательно, ускорение тяготения на поверхности». (Поэтому величины V , g , R и отмечены индексом «0» — чтобы подчеркнуть, что для оценки берутся их начальные значения.) Но если в результате окажется, что искомая масса Δm много меньше начальной массы Земли M_0 ($\Delta m \ll M_0$), то эта оценка вполне разумна и может быть принята в качестве «первого приближения» — как любят говаривать физики.

Далее, чтобы не утруждать себя такими понятиями, как момент силы и момент инерции, Студент смело принял упрощенную модель Земли. Он представил ее в виде обруча, вдоль которого распределена вся ее масса. Тогда начальный «вращательный» импульс Земли равен $M_0 V_0 = (M_0 - \Delta m) V_0 + \Delta m V_0$ (в этом выражении уже выделена отбрасываемая масса Δm). Сразу после выброса вращение оставшейся массы $M_0 - \Delta m$, по предположению, прекратилось, а отброшенная масса приобрела скорость $u - V_0$. Тогда закон сохранения импульса будет выглядеть так:

$$(M_0 - \Delta m) V_0 + \Delta m V_0 = (M_0 - \Delta m) \cdot 0 + \Delta m (u - V_0),$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta m}{M_0} = \frac{V_0}{u - V_0} = \frac{V_0}{\sqrt{2g_0 R_0}}.$$

Осталось найти численные значения. Тут время вспомнить, что радиус Земли $R_0 = 6,4 \cdot 10^6$ м, ее масса $M_0 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, а период обращения вокруг своей оси $T_0 = 24$ ч. Тогда окружная скорость на экваторе Земли равна

$$V_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{3600 \frac{\text{с}}{\text{ч}} \cdot 24 \text{ ч}} \approx 465 \text{ м/с}$$

(больше скорости звука в воздухе!). Стоящее в знаменателе

предыдущей формулы выражение $\sqrt{2g_0R_0}$ – это вторая космическая скорость R_{II} , равная

$$v_{II} = \sqrt{2g_0R_0} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}} \approx 11 \text{ км/с}.$$

В итоге получаем

$$\frac{\Delta m}{M_0} = \frac{0,46}{11} \approx 4\%.$$

«А если учесть, что Земля – это не обруч, а шар, – подумал Студент, – то ее затормозить легче, поскольку не вся ее масса находится на расстоянии R_0 от оси вращения». Действительно, неслучайно есть такое понятие, как момент инерции: для шара он равен $\frac{2}{5} M_0 R_0^2$, а для обруча – $M_0 R_0^2$. (Иными словами, Землю

можно было бы представить обручем радиусом $R = \sqrt{\frac{2}{5}} R_0$.)

Значит, потребуется выбросить массу еще приблизительно в $\frac{2}{5}$ раз меньшую, т.е.

$$\frac{\Delta m}{M_0} < 2\%.$$

Именно с такой точностью верно принятое нами предположение $\Delta m \ll M_0$.

Но много это или мало? Сравним, например, с массой земной коры, плавающей на более тяжелой магме (той самой, которая иногда вытекает из вулканов). Земная кора сложена, в основном, из базальтов и гранитов, покрытых менее плотным слоем осадочных пород. Положим для оценок среднюю толщину коры равной $h = 20$ км, а плотность – порядка $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Тогда масса этого шарового слоя будет порядка

$$m_k = \rho h \cdot 4\pi R_0^2 = 3 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 4\pi (6,4 \cdot 10^6)^2 \text{ кг} \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ кг}.$$

А масса океана еще меньше:

$$m_{ок} \approx 1,4 \cdot 10^{21} \text{ кг}.$$

(Более точные данные можно найти, например, в книге А.В.Бялко «Наша планета – Земля» – М.: Наука, Библиотечка «Квант», вып.29.) В сумме эти массы от массы Земли составляют приблизительно

$$\frac{3 \cdot 10^{22}}{6 \cdot 10^{24}} = 5 \cdot 10^{-3} = 0,5\%.$$

Таким образом, даже если выбросить в космос все океаны и всю

земную кору (вплоть до более плотных пород, куда еще никто не добирался), то и этого не хватит, чтобы остановить вращение Земли.

Но пусть даже хватило бы массы. А какую наименьшую энергию надо было бы затратить, чтобы сообщить выбрасываемой массе вторую космическую скорость? Кинетическая энергия этой массы равна

$$\frac{\Delta m v_{II}^2}{2} \approx \frac{0,02 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ кг} \cdot (11 \cdot 10^3 \text{ м/с})^2}{2} \approx 10^{31} \text{ Дж}.$$

Сколько же потребовалось бы, например, керосина, чтобы обеспечить такую потребность в энергии? При сгорании одного килограмма керосина выделяется примерно $4 \cdot 10^7$ Дж тепла. Если предположить, что все это тепло идет в «дело» без потерь, то необходимая минимальная масса сгоревшего керосина должна составить

$$m_{\text{кер}} \approx \frac{10^{31} \text{ Дж}}{4 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}} \approx 2 \cdot 10^{23} \text{ кг}.$$

О, да это ведь сотня океанов из чистого керосина!

И Студенту стало жаль и массы, и энергии Земли. «Нет уж, — подумал он, — лучше встать и пойти на лекцию».

МОСТЫ И ПАРАШЮТЫ

В.Вышинский

Казалось бы, что общего между парашютом и ...мостом?

Мосты строили тысячи лет, причем это дело считалось настолько важным, что понтификами (pontifices), буквально – строителями мостов, в Древнем Риме называли жрецов, а в настоящее время так называют римских пап. А парашют изобретен всего около ста лет назад (Г.Е.Котельников, 1911 г.). Кроме того, приличный мост весит сотни и тысячи тонн (рис.1), а



Рис. 1. Монтаж моста через реку Томь в городе Томске

парашют помещается в ранце. И все же, с точки зрения аэродинамики, в них есть нечто общее: и мост и парашют – плохо обтекаемые тела. А что значит – плохо или хорошо? Если при обтекании тела струйки воздуха разделяются в его носовой области и затем вновь соединяются в кормовой точке – это хорошо для самолета или дирижабля, потому что при этом сила сопротивления минимальна. Но парашют в принципе должен иметь как можно большее сопротивление, т.е. быть плохо обтекаемым. Встречные струйки тока воздуха, разделившись перед плохо обтекаемым телом, уже не соединяются за ним, а

образуют вихри. Как говорят аэродинамики, образуется отрыв потока. На рисунке 2 это явление изображено для случая обтекания стержней прямоугольного сечения, например элемен-

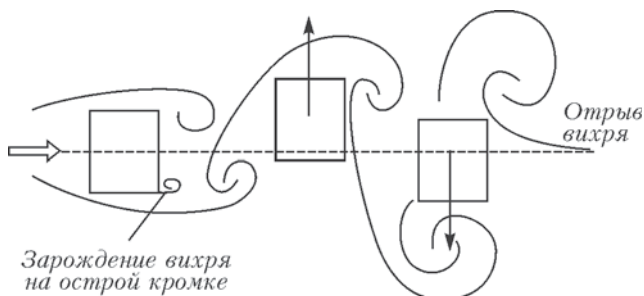


Рис. 2. Раскачка многобалочной конструкции при отрывном обтекании

тов конструкции моста. Таким образом, можно сказать, что общей чертой, объединяющей мосты и парашюты, является отрывное обтекание их воздухом.

Рассмотрим систему двух тел: спускаемый аппарат (СА) + парашют (П) и мост на этапе строительства методом продольной надвигки, когда многобалочная система, пока что облегченная от плит перекрытия, выдвигается от одного быка моста к другому (см. рис.1). И там и здесь мы имеем систему нескольких плохо обтекаемых тел и существенно нестационарный (т.е. изменяющийся со временем) отрывной характер течения воздуха. При исследовании таких течений можно считать, что обтекание всех угловых кромок происходит с отрывом потока, а характер обтекания всей системы тел зависит от расстояния между телами – будь то СА+П или выдвинутые балки моста (аванбеки) при их поперечном обтекании.

Обсудим процесс спуска груза на парашюте. Изменением расстояния между СА и П можно менять величину силы сопротивления. При расстоянии L между ними, меньшем некоторого критического значения L^* , имеет место обтекание с «открытым следом» (нестационарное обтекание; рис.3,а), а при $L > L^*$ – с «закрытым следом» (рис.3,б). Этим пользуются с целью уменьшения динамических нагрузок, максимум которых приходится на момент раскрытия парашюта (рис.4).

Резко тормозиться нельзя и по другой причине – спутный след может догнать быстро тормозящийся парашют и смять его. Поэтому применяют несколько парашютов – сначала маленький, а потом большой – или используют специальные ленты, которые

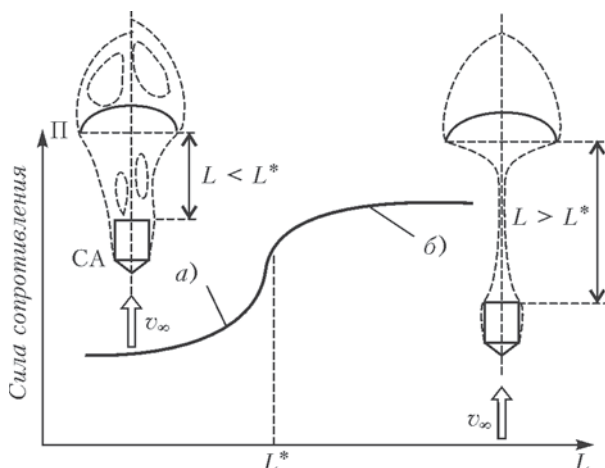


Рис. 3. Изменение схемы обтекания системы двух тел при увеличении расстояния между ними

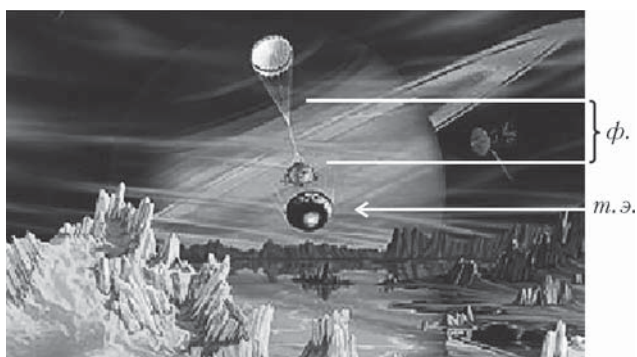


Рис. 4. Изменение расстояния между спускаемым аппаратом и парашютом для управления величиной аэродинамического сопротивления (ф. — фал, который в момент раскрытия парашюта выбран, т.э. — тормозной экран, использованный на начальном этапе торможения)

стягивают «юбку» парашюта и по мере надобности разрываются, чтобы парашют постепенно распустился во всей своей прелесть. Этот прием называется «рифовкой» парашюта – подобно тому, как на парусных судах во время штормового ветра «берут рифы» на парусах, или, по-простому, уменьшают их площадь, подвязывая специальными веревками.

А что же мост? Знание параметров его конструкции позволяет определить скорости ветра, при которых возможно возникнове-

ние аэроупругих колебаний балок, не связанных между собой плитами перекрытия. Возникновение таких колебаний очень опасно, так как может привести к разрушению строящегося моста.

Но что такое аэроупругие колебания? Какова природа их возникновения?

Давно известно, что, перед тем как ступить на мост, подразделение солдат, идущих в ногу, получает команду «сбить шаг», чтобы избежать явления резонанса – совпадения собственных частот колебаний моста с частотой внешнего воздействия. Точно так же отрыв потока является тем внешним воздействием, которое при совпадении частот схода вихрей и собственных частот упругой конструкции моста может привести к его раскачке. Казалось бы, команду «сбить ногу» здесь уже не подашь. Однако не все так безнадежно.

Для борьбы с ветровым резонансом можно либо изменить конструкцию – например, еще на этапе проектирования изменив расстояние между балками, либо применить специальные системы демпфирования – например, аэродинамические системы. Если заставить вихри срываться с острых кромок нерегулярно, идти с разным шагом (не «в ногу»), то это и будет выполнение команды «сбить шаг» по-аэродинамически. На рисунке 1 видны такие гасители колебаний, имеющие вид петушиных гребней. Отрыв потока с острых кромок будет происходить по-прежнему, но масштаб вихрей и фазы схода по длине балки будут различными, так что возмущения потока, созданные предыдущей по потоку балкой, будут достигать другой балки для разных ее участков неодновременно.

Но связь мостов с парашютами оказывается еще теснее: есть парашютисты-экстремалы, которые прыгают с мостов. К сожалению, бывают неудачные прыжки, когда в результате воздействия отрывных ветровых структур, возникающих при обтекании элементов моста, происходит деформация купола парашюта, парашют «складывается», теряет свои тормозящие свойства, т.е. – увь! – становится хорошо обтекаемым телом.

С ПОЛЮСА – НА ПОЛЮС

А.Стасенко

– Нет никаких сомнений! – воскликнул Гленарван.

– ...мы нашли ключ к решению почти всей загадки, и единственным неизвестным теперь является долгота...

Жюль Верн

Как известно, дети капитана Гранта решили пройти, проплыть, проскакать вокруг Земли вдоль тридцать седьмой параллели южной широты ($\theta = -37^\circ$). А вот был случай, когда Общество по распространению пингвинов (Penguin Distribution Society) распорядилось, наоборот, вдоль меридиана доставить партию своих любимых существ с южного полюса на северный «в течение сорока восьми часов» (как полагается при всяком серьезном распоряжении). Конечно, такое требование можно было выполнить только при помощи летательного аппарата. Кстати, требуемая при этом скорость полета v_θ не так уж велика – разделим длину меридиана (или полуокружности Земли) на время, равное двум суткам:

$$v_\theta = \frac{\pi R}{2T} \approx \frac{3,14 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{2 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 116 \text{ м/с} \approx 420 \text{ км/ч}.$$

Заметим, что в сказанном выше уже содержится намек на систему координат (рис.1): географическая широта θ отсчитывается от экватора (где $\theta_e = 0$) и достигает на полюсах значений $\theta_N = 90^\circ$ и $\theta_S = -90^\circ$. А индекс « θ » у скорости указывает на то, что эта скорость направлена строго по меридиану, вдоль которого изменяется только угол θ , а долгота ϕ остается постоянной. Это значит, что нет составляющей скорости, направленной вдоль параллели, т.е. $v_\phi = 0$. Таким образом, первый самолет все время находится в плоскости, вращающейся вместе с Землей.

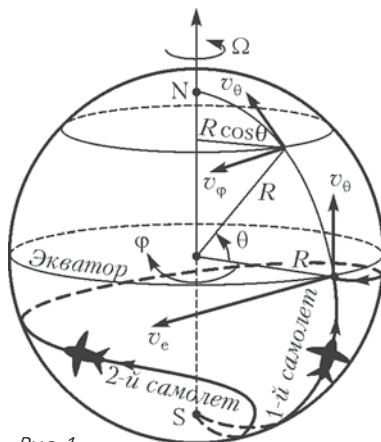


Рис. 1

Но почему «первый»? А дело в том, что потребовалось переместить и вторую партию пингвинов с южного на северный полюс за те же 48 часов, но в плоскости, неподвижной *относительно звезд*, — в качестве контрольного образца: мало ли что думают пингвины о звездах и о Солнце!

Поскольку Земля вращается «с запада на восток», относительно Земли второй самолет должен все время лететь на запад, так что по прибытии на другой полюс угол φ изменится на $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$ (вспомним — за двое суток). Но это значит, что на второй самолет атмосфера (которая вращается вместе с Землей) будет «дуть» все сильнее по мере приближения к экватору, где линейная скорость достигает

$$v_\varphi = v_e = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 460 \text{ м/с}$$

— в полтора раза больше скорости звука! Тут уж не обойтись без истребителя или сверхзвукового авиалайнера.

Итак, два самолета одновременно отправились с южного полюса на северный вдоль, например, нулевого меридиана, где $\varphi = 0$ (что может быть фундаментальнее нуля!). Взглянув на карту или на глобус, можно сразу предсказать, границы каких стран пересечет первый самолет. А вот штурману второго самолета придется подумать о предстоящей траектории полета, чтобы сообщить об этом заранее наземным диспетчерам (во избежание международных конфликтов). Подумаем и мы.

Если меридиональная скорость самолета v_θ постоянна, то широта его местонахождения пропорциональна времени

(рис.2,а):

$$\theta = -90^\circ + \frac{v_\theta t}{R} = 90^\circ \left(\frac{2t}{t_N} - 1 \right), \quad (*)$$

где $t_N = 2$ суток – время прибытия на северный полюс. Можно убедиться, что при $t = 0$ имеем $\theta_S = -90^\circ$, а при $t = t_N$ получаем

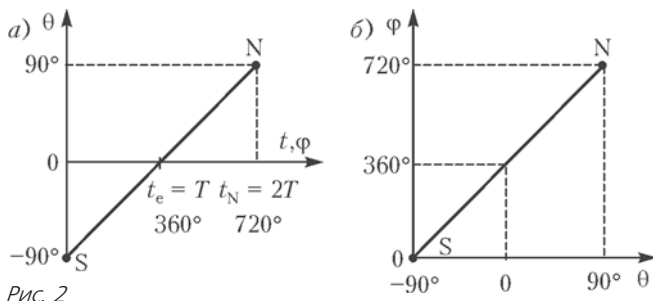


Рис. 2

$\theta_N = +90^\circ$. Естественно, что через сутки оба самолета должны одновременно пересечь экватор ($\theta_e = 0$) в одной и той же точке (тут важно не столкнуться), но под разными углами: первый под углом 90° , а второй под углом $\arctg \frac{v_\theta}{v_e} = \arctg \frac{1}{4} = 14^\circ$. Так что если стартовать с южного полюса вдоль нулевого меридиана, то указанное событие произойдет над Гвинейским заливом (см. карту или глобус). И при этом скорость второго самолета относительно Земли будет равна

$$\sqrt{v_e^2 + v_\theta^2} = v_e \sqrt{1 + \left(\frac{v_\theta}{v_e} \right)^2} = v_e \sqrt{1 + \frac{1}{16}}.$$

А для любого значения широты, как легко показать, скорость второго самолета равна

$$v = v_\theta \sqrt{1 + 16 \cos^2 \theta} = v_e \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{1}{16}}.$$

Но чтобы найти траекторию полета, нужно связать долготу с широтой, т.е. установить зависимость $\theta(\varphi)$, или, как говорят ученые, «исключить время» в формуле (*). В данном случае это очень просто: Земля вращается с постоянной угловой скоростью Ω , значит, угол φ должен быть пропорционален времени:

$$\varphi = \Omega t = \frac{2\pi}{T} t.$$

Найдем отсюда t и подставим в формулу (*):

$$\theta = 90^\circ \left(\frac{2T}{t_N} \frac{\varphi}{2\pi} - 1 \right) = 90^\circ \left(\frac{\varphi}{360^\circ} - 1 \right) = \frac{\varphi}{4} - 90^\circ.$$

Мы учли здесь, что полное время полета равно двум суткам, т.е. $t_N = 2T$, а $2\pi = 180^\circ$. А можно, наоборот, φ выразить через θ (рис.2,б) – кому что нравится:

$$\varphi = 360^\circ + 4\theta.$$

Осталось взять карту или глобус, нанести на них (карандашом, на всякий случай) траектории обоих самолетов и срочно сообщить в соответствующие диспетчерские службы о своих намерениях – не только о координатах θ и φ , но и о времени пролета t над их странами (из формулы (*)).

Таким образом, траектория второго самолета в системе координат, связанной с Землей, похожа на «спираль, навитую на сферу». Любопытно, что в прямоугольной картографической проекции Меркатора (об этом замечательном ученом рассказывалось, например, в «Кванте» №6 за 2006 г.) эта прямая пропорциональность между широтой и долготой давала бы прямую линию, что очень удобно для навигации.

И тут штурман второго самолета подумал: интересно, над какими странами мы пролетели бы, если бы (в нарушение инструкции) все время держали постоянную скорость полета относительно Земли? Но решение этой задачи он предоставил бортовому компьютеру, а мы – читателю.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПО МЕХАНИКЕ

Ю.Носов

Возьмем деревянный брусок размером $2 \times 3 \times 10$ см. Зажмем брусок в тиски, как показано на рисунке, и начнем распиливать его вдоль длинной стороны на две части. В процессе работы будем следить за тем, чтобы ножовкой не задеть винт тисков. Полностью распилим брусок от края до края, ослабим тиски и вынем два новых более тонких бруска. Подчеркнем, что вся операция производится при одном и том же исходном сжатии тисков и не делается никаких перестановок или передвижек бруска.

Как же получается, что тиски – несмотря на то, что сжимают брусок, – не мешают разрезать его на две части?

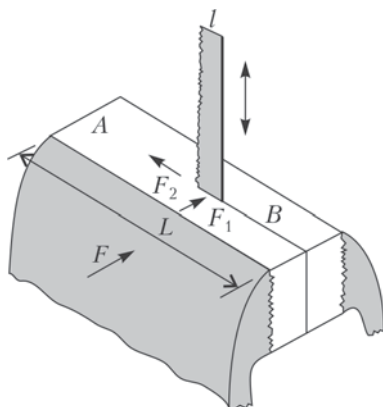
Разумеется, эта задача представляет собой практическую (лабораторную) работу по механике, для которой строгого решения дать нельзя. Но вполне можно удовлетвориться следующими качественными рассуждениями.

В нашем эксперименте удержание деревянного бруска обеспечивается силой сжатия тисков F , создаваемой винтом (см. рисунок). Чтобы сдвинуть брусок вниз, надо приложить силу $F_{\text{вниз}}$, превышающую силу трения покоя

$$F_{\text{тр}} = kF,$$

где k – коэффициент трения между губками тисков и бруском. Величина силы F столь велика, что сдвинуть брусок рукой в сжатых тисках не удастся. Почему же нам удастся перемещать полотно пилы вверх – вниз при продольном разрезании бруска?

Оказывается, что для этой пары материалов (полотно пилы – дерево) сила трения



покоя $F_{\text{тр}1}$ существенно меньше $F_{\text{тр}}$, и, как следствие, сила, необходимая для перемещения пилы, существенно меньше силы $F_{\text{вниз}}$. Для этой пары

$$F_{\text{тр}1} = k_1 F_1,$$

где k_1 – коэффициент трения между полотном пилы и брусом, F_1 – сжимающая сила.

Сила сжатия полотна пилы F_1 во столько раз меньше полной силы сжатия тисков F , во сколько раз площадь сжатого полотна пилы меньше полной площади губок тисков, т.е.

$$F_1 = \frac{l}{L} F,$$

где l – ширина полотна пилы и L – полная ширина губок тисков. Чтобы уменьшить силу F_1 , в нашем эксперименте мы применяем пилу с малой шириной полотна l , например полотно ножовки по металлу. Используя примерные размеры $l = 15$ мм и $L = 150$ мм, получим $F_1 = 0,1F$.

Коэффициент трения покоя (и скольжения) k_1 также много меньше k , так как в случае пилы в контакт с деревом вступает в основном гладкая поверхность стального полотна, а не гофрированная поверхность губок тисков.

Таким образом, в нашем опыте $F_1 \ll F$ и $k_1 \ll k$, что приводит к выводу

$$F_{\text{тр}1} \ll F_{\text{тр}}.$$

Однако в проводимом эксперименте мы не только перемещаем пилу вверх – вниз, но и разрушаем древесные волокна при распиливании. Это требует приложения дополнительной силы F_2 вдоль направления разрезания. Уменьшить величину силы F_2 можно, используя пилу с очень мелким зубом, например опытая же ножовку по металлу или лобзик.

Одно замечание. На первый взгляд может показаться, что при распиливании бруска область B , где уже распил осуществлен, перестает принимать участие в удержании бруска в тисках. Это не так. В силу упругости дерева и малой толщины полотна пилы ($\sim 0,5 - 0,7$ мм) область B сжата практически с такой же силой, как и область A , где распила еще нет. Таким образом, при действии пилы брусок всегда сжат по всей ширине губок тисков.

Реальный успех в проведении обсуждаемого опыта показывает, что рука экспериментатора вполне может развить силу, превышающую $F_{\text{тр}1}$ и F_2 , и успешно провести распиливание бруска, сжатого тисками.

УРОК БЛИЗИЛСЯ К ЗАВЕРШЕНИЮ...

М.Бондаров

Да, урок по теме «Равноускоренное движение» действительно близился к завершению, но до звонка оставалось еще несколько минут. Анатолий Иванович с загадочным видом посмотрел на девятиклассников, и все поняли, что сейчас что-то произойдет. И не ошиблись...

«Готовясь к сегодняшнему уроку, – начал учитель, – я вспомнил случай из биографии Ричарда Фейнмана. Когда он учился в школе, то нередко участвовал в соревнованиях по алгебре. Ученикам давались задачи, для решения которых требовалось то, что сегодня назвали бы нестандартным мышлением, и выделялось строго ограниченное время на их решение – обычно 45 секунд. На листе бумаги можно было писать что угодно, но в конце концов каждый участник должен был обвести в кружок одно число на своем листе, которое и было ответом на задачу. Задачи намеренно выбирались так, что решить их «по правилам» за отведенное время было практически невозможно, но они легко решались, если вы видели короткий путь (или изобретали свой собственный). Фейнман всегда побеждал в таких состязаниях, записывая число и нарочито обводя его в кружочек, хотя зачастую на его листе больше ничего и не было».

Анатолий Иванович остановился и обвел глазами притихших учеников. «Сегодня я подобрал для вас интересную задачу и хочу, чтобы вы оказались в положении юного Фейнмана. Правда, на размышление в первый раз дам вам три минуты. Итак, вот условие задачи:

Автомобиль, двигаясь равнозамедленно, за последовательные промежутки времени в 3 с и 2 с прошел отрезки АВ и ВС в 51 м и 24 м соответственно. Какой путь пройдет автомобиль от точки С до остановки?

Время пошло!»

После команды «стоп» на стол учителя легли три листочка – и все с правильным ответом. «Что ж, давайте заслушаем авторов: пусть поделятся своими секретами».

Знаменитый алгебраист Андрей скромно пояснил: «Я записал систему уравнений и, к счастью, успел ее решить».

Геометр Гена сказал, что применил рассмотренный на одном из предыдущих уроков графический способ решения кинематических задач.

А на листочке любителя арифметики и журнала «Квант» Филиппа красовалось только обведенное в кружок число 25. «Юный Ричард второй!» – крикнул кто-то с последней парты, и все засмеялись.

Анатолий Иванович тоже улыбнулся и сказал: «Ну, вот вы и узнали верный ответ к задаче, а это дорогого стоит. Попробуйте дома поразмыслить над задачей и, возможно, придумаете свой способ решения».

И в это время прозвенел звонок. Однако народ требовал объяснений: «Пусть расскажут подробнее, как за три минуты можно успеть!»

Объяснения, действительно, последовали, но мы, как и Анатолий Иванович, советуем вам сначала решить эту задачу самостоятельно.

Рассказ Андрея. Я дважды применил формулу зависимости перемещения от времени при равнозамедленном движении $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ для первых трех и пяти секунд движения:

$$51 = v_0 \cdot 3 - \frac{9a}{2}, \quad 75 = v_0 \cdot 5 - \frac{25a}{2},$$

откуда легко нашел:

$$v_0 = 20 \text{ м/с} \text{ и } a = 20 \text{ м/с}^2.$$

Затем определил весь путь до остановки:

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 100 \text{ м},$$

после чего вычислил искомый путь:

$$s = 100 \text{ м} - 51 \text{ м} - 24 \text{ м} = 25 \text{ м}.$$

Рассказ Гены. Я начертил примерный график зависимости скорости от времени ($v = v_0 - at$). Определив среднюю скорость за первые три секунды: $v_{\text{ср1}} = 51 \text{ м} : 3 \text{ с} = 17 \text{ м/с}$ и за следующие две секунды: $v_{\text{ср2}} = 24 \text{ м} : 2 \text{ с} = 12 \text{ м/с}$, построил на графике средние линии трапеций, соответствующие этим скоростям. Легко видеть, что за 2,5 с скорость уменьшилась на 5 м/с, значит, ускорение равно по модулю 2 м/с^2 . Зная, что через 4 с

после начала движения скорость автомобиля была 12 м/с , находим его скорость в точке C – это 10 м/с . Ясно, что после этого автомобиль тормозил до остановки 5 с . Из графика находим площадь треугольника, численно равную искомому пути:

$$s = \frac{10 \text{ м/с} \cdot 5 \text{ с}}{2} = 25 \text{ м}.$$

Рассказ Филиппа. Я сразу понял, что смогу обогнать Андрея и Гену лишь в том случае, если не буду пытаться решать задачу алгебраическими и геометрическими способами, которыми они владеют лучше, а попробую придумать что-нибудь похитрее. Поэтому я решил применить метод угадывания ответа (о котором читал в одном из номеров «Кванта»). Вспомнилось мне также, что еще в 7 классе Анатолий Иванович рассказывал о методе обратимости времени.

Итак, мысленно пустим время вспять и будем рассматривать автомобиль, который в этом случае разгоняется, трогаясь с места. Тогда пройденный от начала движения путь определяется по формуле $s = at^2/2$. Мы не знаем, чему равно ускорение автомобиля, но предположим, что оно составляет 2 м/с^2 (ведь, как правило, в обычных задачах оно не превышает 5 м/с^2). К тому же, сокращается «двойка» в формуле для пути, и пройденный путь оказывается не просто пропорционален квадрату времени движения, а численно равен ему. Если теперь предположить, что на искомом пути автомобиль двигался целое число секунд, то этот путь тоже равен не просто целому числу метров, а квадрату некоторого целого числа. Причем квадратами будут и все другие пути, пройденные автомобилем от начала движения за целое число секунд. Придется заняться перебором.

Пусть искомый путь равен 1 метру. Тогда $1 + 24 = 25$ – квадрат, но $1 + 24 + 51 = 76$ – уже не квадрат, значит, ответ «1 метр» не подходит. Дальше я попробовал следующий квадрат – 4 метра. Но $4 + 24 = 28$ – не квадрат, значит, снова не угадал. Не подходят и 9, и 16 метров. Пробую 25, и тут, наконец, победа – вокруг одни квадраты: $25 + 24 = 49$, $25 + 24 + 51 = 100$. Ответ найден!

А какой из способов решения пришелся по душе вам?

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА



ПУТЕШЕСТВИЕ НА ВОЗДУШНОМ ШАРЕ

С.Варламов

Воздушный шар с горелкой для подогрева воздуха сейчас не является диковинкой. Такое средство для полетов гораздо безопаснее, чем оболочка, наполненная водородом, и много дешевле, чем шар, наполненный гелием.

Оболочка воздушного шара сделана из прочной, гибкой и термостойкой ткани. Воздух, окружающий шар, при температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ имеет вблизи поверхности Земли плотность $\rho_0 = 1,3\text{ кг/м}^3$. Плотность подогретого до $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ воздуха составляет $\rho_1 = 1,3\text{ кг/м}^3 \cdot (273/373) = 0,95\text{ кг/м}^3$. Чтобы поднять в воздух человека (массой 100 кг), корзину (100 кг), оболочку шара (100 кг) и запас топлива с горелкой (100 кг), нужно, чтобы диаметр шара с горячим воздухом был равен примерно 13 м (см., например, статью А.Стасенко «Как попасть на Таинственный остров»). Конечно, реальный воздушный шар вовсе не имеет форму геометрически правильного шара и температура воздуха в нем не такая высокая, т.е. размеры шара должны быть больше тех, что мы получили в качестве оценки, но его характерный размер оценен правильно. Если максимальная температура, до которой разрешается нагревать воздух в шаре по соображениям безопасности, достигает $150\text{ }^{\circ}\text{C}$, то такой шар может взять в полет не одного, а трех пассажиров или какой-нибудь дополнительный полезный груз.

Размеры оболочки (максимальный объем, который можно заполнить горячим воздухом) путешественники на шаре во время полета изменять не могут, поэтому для управления грузоподъемностью шара то включается, то выключается горелка. Шар может не двигаться относительно окружающего воздуха лишь в те редкие мгновения, когда сила тяжести и архимедова сила, действующие на шар, в сумме дают ноль. Если в это время горелка не работает, то через некоторое время шар начнет опускаться, так как воздух в нем постепенно охлаждается. Если же горелка работает, то продолжающийся подогрев воздуха приведет к тому, что шар начнет подниматься вверх. Ситуация

напоминает эквилибриста на канате, который должен непрерывно балансировать, чтобы не упасть. Поскольку при движении в воздухе (вверх или вниз) шар испытывает сопротивление воздуха, то скорость его очень быстро устанавливается, т.е. сумма всех действующих на шар сил, включая силу сопротивления, практически всегда равна нулю.

А с какой именно установившейся скоростью будет опускаться шар, если, например, температура теплого воздуха внутри шара стала на 1°C меньше, чем температура, при которой сила тяжести компенсируется архимедовой силой? Давайте разберемся.

Воздушный шар имеет в нижней части отверстие, через которое воздух нагревают. Через это же отверстие воздух внутри шара сообщается с окружающим шар холодным воздухом. После выключения горелки воздух в верхней части объема шара еще некоторое время остается горячим, а в нижней части достаточно быстро принимает температуру окружающей среды. Воздух — плохой проводник тепла, поэтому охлаждение горячего воздуха в шаре приводит к тому, что в нижнюю часть шара входит воздух при температуре окружающей среды. При этом форма шара практически не изменяется. Таким образом, грузоподъемность шара обеспечивает одна и та же масса нагретого воздуха при постоянном давлении, а не один и тот же объем воздуха.

Если в какой-то момент времени t сила тяжести компенсируется подъемной силой при температуре горячего воздуха $t_0 = 100^\circ\text{C}$, то выполнялось равенство

$$Mg = \frac{\pi D^3}{6} \rho_0 \left(1 - \frac{273}{373} \right) = F(t_0).$$

После того как горячий воздух остыл на 1°C , подъемная сила уменьшилась:

$$F(t_1) = \frac{272}{373} \frac{\pi D^3}{6} \rho \left(1 - \frac{272}{372} \right) = F(t_0)(1 - 0,01),$$

и это уменьшение составило 1%.

Разумно предположить, что шар при движении в воздухе испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное площади поперечного сечения шара S , квадрату скорости движения относительно воздуха u и плотности окружающего воздуха ρ_0 :

$$F_c \sim S \frac{\rho u^2}{2}, \text{ или } F_c = KS \frac{\rho u^2}{2}.$$

Коэффициент пропорциональности K зависит от формы тела. В нашем случае следует брать $K = 0,2$. Оценка скорости опускания

шара, проведенная в соответствии с указанной зависимостью силы сопротивления от скорости, дает $u \approx 1,5$ м/с. Чтобы скорость спуска нашего шара ($M = 400$ кг, $D = 13$ м) была меньше 1 м/с (из соображений безопасности приземления, например), нужно, чтобы подъемная сила и сила тяжести отличались меньше чем на 0,5%, т.е. температура не должна отличаться больше чем на 0,5° от «равновесной».

Сделаем еще одну оценку. Рассчитаем, какую массу m балласта следует выбросить за борт корзины воздушного шара, чтобы восстановить равенство силы тяжести и подъемной силы при понижении температуры горячего воздуха от 100 °С до 99 °С (окружающий шар воздух имеет температуру 0 °С):

$$(M - m)g = Mg(1 - 0,01), \text{ откуда } m = 4 \text{ кг.}$$

Бытует известное заблуждение, что воздушный шар поднимается до тех пор, пока не достигнет слоев воздуха, имеющих столь малую плотность, что выталкивающая сила становится равной силе тяжести, действующей на шар. Это утверждение можно считать справедливым только для шаров с герметичной оболочкой, заполненной водородом, гелием или каким-либо другим газом с плотностью, меньшей плотности воздуха при одинаковых температуре и давлении. При этом неважно, будет оболочка растяжимой или жесткой. К воздушному шару с горячим воздухом это утверждение неприменимо, так как шар прекращает подниматься вверх не потому, что плотность воздуха снаружи из-за подъема уменьшается, а потому, что воздух прекращают нагревать! Воздух в шаре без подогрева охлаждается, и его плотность увеличивается.

А какова роль оболочки шара в процессе охлаждения воздуха? Потери тепла через оболочку происходят посредством двух механизмов теплопередачи: за счет излучения и за счет теплопроводности (которая приводит к возникновению конвекции). Оценим вклады каждого механизма в «общее дело».

Оболочка шара обычно делается из материи, не пропускающей воздух и имеющей плотность, чуть меньшую плотности воды (10^3 кг/м³). Исходя из наших оценок размера шара ($D = 13$ м) и массы оболочки (100 кг), получим, что толщина оболочки равна примерно 0,2 мм. Воздух, прилегающий к оболочке, по обе стороны от нее находится в движении. Внутри оболочки соприкасающийся с ней воздух охлаждается и опускается вниз, а снаружи – нагревается и поднимается вверх. (Воздух внутри оболочки движется аналогично вихревому движению клубов дыма, поднимающихся в холодном воздухе.

При этом горелка обеспечивает дополнительный подогрев воздуха в центральной части шара. Отличие состоит в том, что в случае воздушного шара оболочка имеется, а в случае клубов дыма ее нет.)

Оболочка изнутри подогревается излучением горячего воздуха и благодаря конвекции горячего воздуха внутри шара. Снаружи поток излучения от оболочки превышает приток энергии за счет излучения окружающего холодного воздуха, и, кроме того, энергию от оболочки уносит конвективный поток нагретого воздуха. Разумно предположить, что оболочка, находясь на границе раздела горячего и холодного воздуха, имеет температуру где-то между $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. На рисунке 1 показано распределение температуры в воздухе вокруг нагретого на $9\text{ }^{\circ}\text{C}$ выше

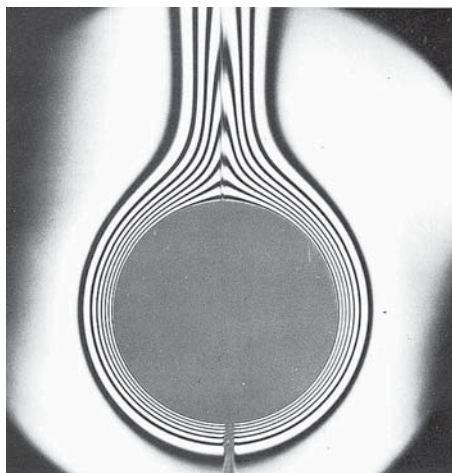


Рис. 1. Свободная конвекция от горизонтального цилиндра

окружающего воздуха длинного медного цилиндра диаметром 6 см. Рисунок взят из «Альбома течений жидкостей и газа» М.Ван-Дайка. Визуализация разных температур осуществлялась интерферометрическим методом. Видно, что вокруг горячего тела возникает поток воздуха, а толщина слоя движущегося воздуха составляет малую часть диаметра тела. По-видимому, ситуация будет такой же и для рассматриваемого нами воздушного шара.

Трудно было удержаться и не привести еще один рисунок из этого Альбома. На рисунке 2 показаны линии тока воздуха с дымом при конвективном движении. Воздух движется в про-



Рис. 2. Линии тока в конвективном движении между соосными цилиндрами

странстве между двумя коаксиальными цилиндрами. Внутренний цилиндр имеет большую температуру, чем внешний.

Конечно, можно провести соответствующие расчеты и выяснить, сколько тепла теряет наш воздушный шар через свою оболочку, но оставим это на потом. А сейчас предлагаем вам самостоятельно получить ответы на следующие вопросы.

1. Сколько топлива нужно взять с собой путешественникам на воздушном шаре, чтобы продержаться в воздухе один час?

2. Какой запас балласта должны иметь на всякий случай (вдруг сломается горелка) путешественники, чтобы они могли опуститься на землю с высоты 1 км и обеспечить скорость приземления не больше 1 м/с?

3. Когда выгоднее путешествовать на воздушном шаре, т.е. при какой температуре окружающего воздуха один килограмм топлива обеспечивает максимальное время полета?

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Э.Руманов

Для тех, кто не знает, – два слова про Ричарда Фейнмана (1918–1988). Американский физик, один из основателей квантовой электродинамики, Нобелевский лауреат, один из самых ярких теоретиков XX века. Студенты изучают физику по «Фейнмановским лекциям» (есть прекрасный русский перевод Г.И.Копылова) и находят там примерно такие слова:

«Картина мира видится людям очень сложной. Многие не подозревают, что сложные процессы зачастую подчиняются простым уравнениям».

Проиллюстрируем это на конкретном примере. Нас будут интересовать качественные изменения в свойствах или поведении различных систем в критическом состоянии. Оказывается, закономерности таких изменений универсальны, в определенном отношении они не зависят от рассматриваемой системы. Впрочем, ограничимся рамками физики, химии и отчасти биологии, не затрагивая системы социальные, политические и т.п.

Впервые термин «критическая точка» появился в статьях о кипении. Посмотрим, что получится, если нагревать жидкость в запаянной ампуле. (Такой опыт требует специальной техники безопасности, без которой проводить его нельзя.) Перед нагревом жидкость занимает часть ампулы, остальной объем заполнен ее паром. Давление пара устанавливается таким, что температура кипения равна комнатной. При более высоком давлении пар будет конденсироваться, отдавая тепло окружающей среде, при более низком давлении жидкость будет испаряться, отнимая тепло у среды, пока равновесие не восстановится. В прозрачной ампуле поверхность жидкости отражает свет и хорошо видна. При нагреве открытого сосуда (например, чайника) его температура остается постоянной, пока вся вода не выкипит. В ампуле же температура и давление согласованно растут: температура всегда равна температуре кипения при данном давлении (рис. 1). По мере нагрева плотность пара увеличивается, так как его в ампуле становится все больше, а плотность жидкости уменьшается из-за

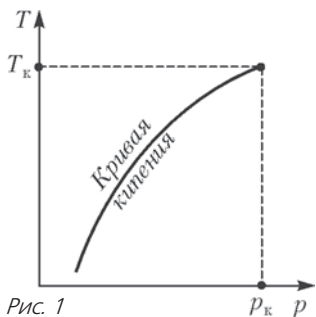


Рис. 1

роста температуры (тепловое расширение). В критической точке (p_k, T_k) обе плотности одинаковы, и отличить жидкость от пара невозможно. Около этой точки (т.е. при давлении и температуре чуть ниже p_k и T_k) отличие есть, но оно мало, и случайные слабые воздействия (из-за беспорядочного броуновского движения) вызывают переходы от одного состояния вещества к

другому. Ампула в этих условиях заполнена как бы смесью мелких капель жидкости и пузырьков пара. Такая среда сильно рассеивает свет (явление критической опалесценции). В некоторый момент нагрева ампула мутнеет, поверхность жидкости становится невидимой. Потом прозрачность восстанавливается, но никакой поверхности раздела уже нет — вещество в ампуле однородно. Про него нельзя сказать, жидкость это или пар.

Примеры качественных изменений при определенных (критических) значениях параметров встречаются повсюду. Скорость цепной реакции по достижении критической массы неудержимо нарастает, и происходит взрыв. Твердый материал разрушается, когда достигается его предел прочности. Если скорость потока жидкости или газа превысит определенную величину, в нем образуются вихри. И так далее. На первый взгляд, эти явления совершенно разнородны. Выяснилось, однако, что в критических условиях всегда наступает хаос. Эта универсальность критических явлений позволяет знакомиться с ними на самых простых примерах. А именно, обсудим критическое поведение, которое демонстрирует шарик на неровной поверхности.

Пусть шарик находится в ямке, как показано на рисунке 2. Если в начальный момент времени положить шарик на склон ямки, он будет кататься взад и вперед, пока, теряя энергию из-за трения, не остановится в нижней точке ямки — в точке 1. При смещении шарика из этой точки вправо или влево сила, действующая на него, будет направлена так, чтобы вернуть его в эту точку. Такое равновесие называют устойчивым. Где бы ни был шарик в начальный момент, в конце концов он окажется в точке равновесия. (Для более сложных систем этот вывод не столь очевиден, но тоже справедлив.) Можно

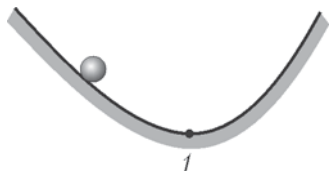


Рис. 2

сказать, что шарик «забывает» свое прошлое. У каждой системы есть свое характерное время забывания.



Рис. 3

Посмотрим на ямку с более пологими склонами (рис.3). Здесь шарик тоже останавливается в точке равновесия, но время забывания у него больше. Случайные толчки (если, например, ямка расположена на столике в вагоне поезда) легко выводят шарик из равновесия, после чего он не спешит туда возвращаться. В предельном случае шарика на горизонтальном столе говорят о безразличном равновесии. Если в начальный момент сообщить шарiku некоторую скорость, точка, в которой он остановится, зависит от этой скорости и от его начального положения. Под действием случайных толчков шарик может посетить каждую точку стола с одинаковой вероятностью.

Рассмотрим теперь более сложный рельеф (рис.4), где кроме ямки имеется еще горбик, вершину которого – точку 2 – математики называют точкой неустойчивого равновесия. При смещении шарика из этой точки появляется сила, стремящаяся такое смещение увеличить. Так как в реальности невозможно ни поместить шарик в точку 2 с математической точностью, ни избежать сколь угодно слабых толчков, то, с позиций экспериментатора, равновесия в этой точке нет. Значение точки 2 – в другом.



Рис. 4

Состояние движущегося шарика определяется двумя величинами – его положением x на рельефе в данный момент времени и скоростью v в этот момент. Два числа x и v можно считать координатами точки на плоскости. Ее называют фазовой плоскостью. В следующий момент времени будут уже другие значения x и v , движение «отображается» линией на фазовой плоскости – фазовой траекторией. Когда рельеф таков, как на рисунках 2 или 3, все траектории приходят в точку $x = x_1, v = 0$. Если же шарик на рисунке 4 перекатится через бугор, в точку 1 он может и не вернуться (это зависит от той части рельефа правее точки 2, которая на рисунке не показана, и от начальной скорости шарика). Иными словами, траектории, сходящиеся к точке $(x_1, 0)$, занимают только часть фазовой плоскости. Эту часть называют бассейном притяжения точки x_1 . Граница бассейна проходит через точку $x = x_2, v = 0$. По другую сторону границы расположены бассейны других точек равновесия. Фазовая плос-

кость поделена на бассейны притяжения подобно тому, как суша поделена водоразделами на бассейны различных водоемов.

Будем теперь спрямлять рельеф на рисунке 4 так, что ямка и горбик сглаживаются, а точки 1 и 2 сближаются. На рисунке 5

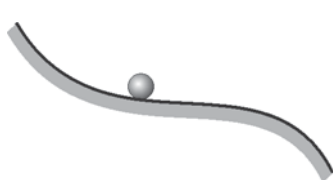


Рис. 5



Рис. 6

показан момент слияния этих точек. При меньшем изгибе равновесия нет, шарик катится вниз (рис.6). Таким образом, в критической ситуации, соответствующей рисунку 5, во-первых, исчезает граница бассейнов притяжения, или, точнее, левый бассейн поглощается правым, а во-вторых, при изгибе, близком к критическому, рельеф содержит почти горизонтальный участок. Движение шарика в этом случае подобно тому, что мы описывали, комментируя рисунок 3. Время забывания велико, а очень слабые случайные толчки (которые есть в любой реальной системе) вызывают «блуждания» большого размаха.

Наконец, обратимся к рельефу на рисунке 7 – две ямки, разделенные горбом. Здесь при сглаживании горб исчезает, обе



Рис. 7

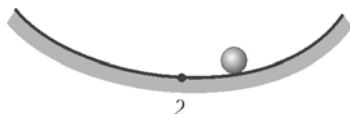


Рис. 8

ямки сливаются в одну (рис.8), неустойчивая точка 2 в результате слияния с точками 1 и 3 становится устойчивой.

Подчеркнем отличия превращений на рисунках 4–6 и на рисунках 7–8. В первом случае (слияние двух точек) равновесие исчезает, а новое положение равновесия оказывается отодвинутым от места слияния на конечное расстояние. Когда же сливаются три точки, новое равновесие возникает там, куда приходят старые точки в момент превращения. Но в обоих случаях имеют место почти горизонтальный участок рельефа, большое время забывания, хаотические колебания большого размаха под влиянием слабых случайных толчков.

При изучении критических явлений полезно понятие восприимчивости. Что такое восприимчивость применительно к шарик-

ку, можно пояснить, вернувшись к рисунку 2. Предположим, что к шарiku с помощью нити, перекинутой через блок, привязан грузик (рис.9). Пусть масса грузика мала по сравнению с массой шарика. Под действием грузика шарик переберется из точки 1 в точку 1' – это его новое положение равновесия. Отношение расстояния $|x_1' - x_1|$ к массе грузика и будет в данном случае восприимчивостью. Ясно, что на пологом рельефе (см. рис.3) восприимчивость больше, чем на крутом. То же относится к рельефам с почти горизонтальным участком, как на рисунках 5 и 8.

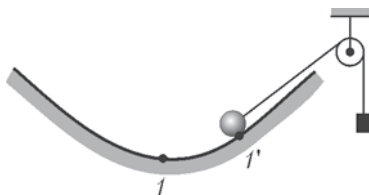


Рис. 9

Когда условия приближаются к критическим, восприимчивость любой системы (а не только шарика) растет. Отклик на каждое, даже слабое, воздействие велик. А так как среди воздействий всегда есть слабый шум, поведение системы в критических условиях оказывается хаотическим.

Для шарика критические условия связаны только с изменениями равновесия. Более интересны системы, которым внешнее воздействие не дает прийти в равновесие. Так, Земля не приходит в равновесие с межпланетной средой благодаря световому потоку от Солнца, а чтобы в камере холодильника поддерживалась температура ниже комнатной, надо включить его в сеть. Время забывания у таких (активных) систем, разумеется, тоже ограничено. Поэтому рано или поздно их поведение перестает зависеть от начальных условий. Система, как говорят, выходит на установившийся режим.

Есть разные сорта установившихся режимов. Выход на стационарный режим можно наблюдать, не расставаясь с шариком. Надо его бросить в сосуд с вязкой жидкостью (например, с глицерином). Скорость, с которой шарик опускается вниз, быстро выходит на постоянное значение, определяемое равенством силы тяжести шарика и суммы двух сил: выталкивающей (архимедовой) силы и силы вязкого трения. Из-за трения при движении шарика выделяется тепло, так что жидкость, окружающая шарик, нагревается и ее вязкость падает. От этого установившаяся скорость увеличивается, тепла выделяется больше, вязкость становится еще меньше и так далее. Возникает, как говорят, обратная связь между скоростью и вязкостью. Такая связь служит причиной неустойчивости описанного режима при определенных условиях (значениях параметров). Для стального

шарика в глицерине, например, критический радиус составляет примерно 1 см, а критическая скорость – около 1 м/с. Однако наблюдение этого явления в лабораторных условиях нереально. Тепловые процессы идут медленно, неустойчивость развивается за время порядка десятков минут, так что сосуд пришлось бы делать слишком глубоким. Иное дело, например, движение пластов земной коры. Возможно, некоторые землетрясения обусловлены тепловой неустойчивостью этого движения. Другой подозрительный в этом плане объект – ледник, ползущий вниз по склону горы.

Стационарный режим, как и состояние равновесия, тоже можно характеризовать восприимчивостью, которая в критической области параметров должна расти. Есть надежда, что изучение низкочастотного шума сложных промышленных и природных систем позволит найти признаки, предупреждающие заранее о назревающем кризисе. Трудно поверить, что сложные химические или биологические системы имеют что-либо общее с шариком, ямками и горбиками. Тем не менее, высокая восприимчивость и обусловленная ею хаотизация в критических условиях обнаружены у всех систем, исследованных до сих пор. Обратное утверждение о том, что высокую восприимчивость можно получить только в условиях, близких к критическим, не доказано, но, по-видимому, верно.

Нестационарные установившиеся режимы называют автоколебаниями. Многие холодильники работают в периодическом режиме: мотор включается, когда температура в камере превысит допустимое значение, и выключается после того, как она достаточно понизилась, затем следует стадия медленного нагрева из-за теплопроводности стенок, и все повторяется. Другой пример периодического режима – ход часов. В них источником «внешнего» воздействия, мешающего прийти в равновесие, служит батарейка или сжатая пружина.

До сих пор мы говорили о хаосе, который не выходит за пределы относительно узкой критической области параметров. Но есть режимы, которые после своего рождения остаются хаотическими, даже когда значения параметров уходят из критической области. Изучение такого хаоса показало, что и здесь важную роль играет соседство устойчивых и неустойчивых состояний. Именно хаос мешает делать достоверные предсказания, например правдивые прогнозы погоды. Хаос многолик, и особенно интересны различия между его проявлениями в разных случаях. Кое-что об этом уже удалось узнать, но главная работа – впереди.

КАК МОЛЕКУЛЫ СТОЛКНУЛИСЬ

А. Стасенко

Почему вообще возможна конденсация — буквально «уплотнение»? Ведь при атмосферном давлении плотность жидкости на три порядка больше, чем плотность газа (или пара). Значит, что-то заставляет молекулы газа стремиться друг к другу и удерживаться рядом. А при нагревании жидкости происходит ее испарение — следовательно, что-то преодолевает удерживающие силы.

Прежде всего ясно, что молекулы должны иметь конечные размеры. Если бы это были материальные точки (такая модель тоже иногда используется), то конденсат любой ограниченной массы газа или пара имел бы нулевой объем. И на дне стакана трудно было бы разглядеть 200 граммов воды. Поэтому будем считать молекулы абсолютно жесткими шариками, имеющими диаметр d .

Далее, если молекулы притягиваются друг к другу (как, например, планеты или звезды), то должна существовать потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ их взаимодействия, зависящая от расстояния r между молекулами. В случае гравитации ньютоновская потенциальная энергия имеет вид $E_{\text{п}} \sim -\frac{1}{r}$, а для молекул потенциальная энергия притяжения еще резче зависит от расстояния: $E_{\text{п}} \sim -\frac{1}{r^6}$. Но поскольку мы решили считать молекулы жесткими шариками, они никак не могут

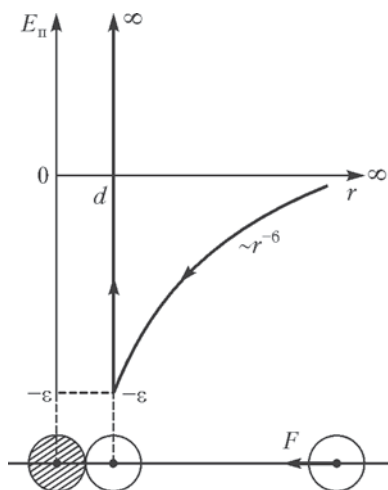


Рис. 1

сблизиться на расстояние (между их центрами!), меньшее d : после их соприкосновения потребовалась бы бесконечно большая сила и возникла бы бесконечно большая энергия *отталкивания*. В процесс сближения $E_{\text{п}}$ будет изменяться вдоль кривой $\infty \rightarrow -\infty$ на рисунке 1 — там стрелкой даже показано направление этого изменения. Понятно, что для молекул, не взаимодействующих друг с другом вплоть до соприкосновения, потенциальная энергия изменялась бы по сторонам прямого угла $\propto d \infty$.

По сути дела, модель абсолютно жестких шариков адекватна «точечным» молекулам, у которых сила (и потенциальная энергия) отталкивания резко растут при сближении.

Итак, о чем же говорит рисунок 1? В начале координат, $r = 0$, находится центр молекулы-шарика, которую мы считаем фиксированной (она заштрихована). Центр другой молекулы-шарика может находиться на любом расстоянии $d < r < \infty$. Эта другая молекула притягивается к фиксированной с силой, пропорциональной *темпу* изменения потенциальной энергии с изменением расстояния. Эту длинную фразу физики заменяют простым соотношением: $F = -\frac{dE_{\text{п}}}{dr}$ и говорят: «сила равна минус градиенту потенциальной энергии». Отсюда видно, что склон кривой $E_{\text{п}}(r)$ должен быть направлен к началу координат, если мы хотим описать притяжение. Образно говоря, вторая молекула стремится «свалиться» в потенциальную яму глубиной ϵ и остаться там (если уж нельзя сближаться далее). Это и есть предпосылка для конденсации.

Но ведь молекулы сближаются не квазистатически. Как известно, они обладают средней кинетической энергией, пропорциональной температуре:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

и если скорость второго шарика на рисунке 1 слишком велика, то он упруго отразится от первого (заштрихованного) и выскочит из потенциальной ямы. А что значит «слишком»? Ясно, что нужно сравнить две энергии: потенциальную энергию притяжения ϵ и кинетическую энергию второго шарика, которой он обладает на большом расстоянии от первого, т.е. «на бесконечности». И теперь понятно, что конденсация возможна в случае соблюдения условия

$$\epsilon \gtrsim \frac{mv_{\infty}^2}{2}.$$

Это значит, что кинетическая энергия хаотического теплового движения должна быть меньше глубины потенциальной ямы.

Но, как известно, при конденсации выделяется энергия. Ее характеризуют удельной теплотой испарения или конденсации. Ясно, что она имеет прямое отношение к глубине потенциальной ямы: чем больше ε , тем большую энергию надо затратить, чтобы «вытащить на бесконечность» молекулу из потенциальной ямы, и тем большая энергия выделится в обратном процессе конденсации. Правда, те значения удельной теплоты испарения, которые указаны в различных справочниках, получены в условиях, когда пар (а тем более жидкость) является сплошной средой. Поэтому надо принять во внимание и работу по расширению пара после «вытаскивания» его молекул из жидкости. К тому же, испаряющуюся молекулу удерживает не одна фиксированная молекула (заштрихованная на рисунке 1), но еще и множество других, более отдаленных.

Понятно, что две отдельные молекулы никак не могли бы сконденсироваться, т.е. остаться рядом в покое — кто-то должен унести лишнюю энергию. Этим «кто-то», конечно, является третья молекула. А поскольку участников процесса очень много, то «третьи» молекулы, получая избыток энергии, нагревают газ, что приводит к росту средней кинетической энергии молекул.

Но почему молекулы должны сближаться вдоль линии центров, как на рисунке 1? Рассмотрим более общий случай (рис.2):

первая молекула по-прежнему фиксирована (заштрихована), а вторая «из бесконечности» движется с относительной скоростью v_∞ , но не вдоль линии центров, а, как говорят, с прицель-

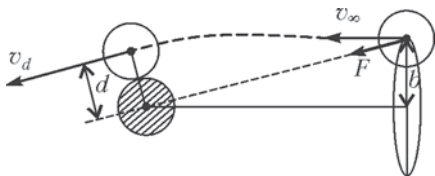


Рис. 2

ным расстоянием b от этой линии. Это такое расстояние, что все молекулы с центрами внутри круга площадью πb^2 непременно столкнутся с фиксированной молекулой — по крайней мере, коснутся ее, а все молекулы с центрами вне этого круга пролетят мимо. Конечно, сила притяжения F во все время сближения двух молекул направлена вдоль линии центров, она-то и искривляет траекторию молекулы.

Запишем условие сохранения полной механической энергии второй молекулы в двух состояниях — «на бесконечности» и в

момент касания первой:

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} + 0 = \frac{mv_d^2}{2} + (-\epsilon).$$

Здесь учтены те же факты, которые указаны на рисунке 1: потенциальная энергия вдали равна нулю, а при соприкосновении молекул равна $-\epsilon$.

А еще можно записать закон сохранения *момента импульса*. Это второй закон Кеплера о секториальной скорости, или о том, что радиус-вектор, проведенный из центра силового поля, замечает равные площади в равные отрезки времени. Хотя закон получен Ньютоном для гравитации, он верен для любого центрального взаимодействия (когда сила направлена строго по линии центров). Итак,

$$mv_{\infty} \cdot b = mv_d \cdot d.$$

Выразим из этого уравнения v_d и подставим в закон сохранения энергии. Получим

$$\left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1 + \frac{\epsilon}{mv_{\infty}^2/2} = 1 + \frac{\alpha}{T}.$$

Здесь α – постоянная, а в знаменателе оказалась температура. Видно, что с охлаждением любого газа, когда уменьшается средняя скорость его молекул, прицельное расстояние b растет: молекулы «чувствуют» друг друга на все больших расстояниях, а в пределе $T \rightarrow 0$ – на бесконечно больших. Тут-то все газы и сконденсируются.

Кстати, полученный результат не зависит от конкретного вида потенциальной энергии взаимодействия, а зависит лишь от отношения потенциальной и кинетической энергий. Поэтому он применим и к кинетике небесных тел (звезд, планет, газовых туманностей, галактик...). Что же мешает им всем сконденсироваться (это было бы ужасно!)? Конечно, закон сохранения момента импульса. И слава Богу.

РАКЕТА НА ВОДЯНОМ ПАРЕ, ИЛИ КАК СТУДЕНТ С ЛУНЫ УЛЕТАЛ

А.Стасенко

Как-то раз, пия кофе и наблюдая за струйкой пара из чайника, Студент вдруг подумал: что, если бы пришлось срочно взлетать с поверхности Луны, а топлива для ракеты уже нет, но остались еще тонна воды и некоторый запас энергии в аккумуляторах? Конечно, согласно закону сохранения импульса, разумно нагреть и испарить воду и ускорить полученный водяной пар до максимально возможной скорости. Но до какой?

И тут начались физические оценки.

Пусть пар воды нагрет до температуры T_0 . Молекула воды – трехмерный объект; следовательно, она обладает шестью степенями свободы. Это означает, что положение в пространстве ее центра масс можно описать тремя числами, например значениями декартовых координат x, y, z , а ее ориентацию – тремя углами относительно этих осей. Но, как известно, в условиях термодинамического равновесия на каждую степень свободы любого тела (и молекулы, и паровоза) приходится энергия $kT_0/2$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Это утверждение называется в молекулярной физике и термодинамике теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Итак, на одну молекулу воды будет приходиться энергия $6 \cdot (kT_0/2) = 3kT_0$, а на целый моль, в котором содержится N_A молекул, – энергия $U = N_A \cdot 3kT_0 = 3RT_0$, где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро, а $R = N_A k = 8,31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная.

Предположим далее, что этот моль водяного пара можно как-то – конечно, через сопло ракеты – расширить так, что он охладится почти до абсолютного нуля. Ведь для того и нужно сопло, чтобы тепловую хаотическую энергию молекул превратить в направленное движение молекул, т.е. в кинетическую энергию. Более того, надо учесть еще и работу, которую может совершить расширяющийся газ. Если начальный объем моля

равен V_0 , то этот «запас работы» равен $p_0 V_0 = RT_0$, где p_0 – давление газа.

Термодинамика доказывает, что в процессе ускорения газа в сопле все время будет сохраняться сумма

$$H_0 = U_0 + p_0 V_0 = 3RT_0 + RT_0 = 4RT_0.$$

Она даже имеет специальное название – энтальпия, или тепло-содержание. Но по мере ускорения эта начальная энтальпия будет распределяться между растущей кинетической энергией и убывающим теплосодержанием:

$$H_0 = H + M \frac{v^2}{2} = 4RT + M \frac{v^2}{2}, \quad (*)$$

где M – молярная масса (в случае воды $M = 0,018$ кг/моль). Таким образом, можно было бы ожидать, что при стремлении температуры газа к нулю его скорость должна стремиться к максимальному значению

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{2H_0}{M}} = \sqrt{\frac{8RT_0}{M}}.$$

Если конструктивные ограничения позволяют нагреть пар, например, до температуры $T_0 = 1000$ К, то значение этой скорости составило бы

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 10^3}{0,018}} \text{ м/с} \approx 2000 \text{ м/с}.$$

Это неплохо. Но почему же «бы»? А потому, что по мере расширения и охлаждения пар может оказаться пересыщенным и начнется его конденсация. Значит, нужно учесть и этот процесс.

Однако прежде всего посмотрим, как изменяется давление пара с температурой до точки насыщения (росы). Если тепло ниоткуда не подводится к расширяющемуся пару и никуда не отводится (т.е. стенки сопла теплоизолированы), то работа газа по его ускорению может производиться только за счет убыли его внутренней энергии. (Рассмотренный процесс называется адиабатическим.) Так и запишем:

$$p \Delta V = -\Delta U.$$

Подставим сюда зависимость внутренней энергии от температуры: $U = 3RT$ и учтем уравнение состояния: $p = \frac{RT}{V}$. Получим

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{\Delta T}{T}.$$

Но это значит, что относительное приращение объема в три раза больше относительной убыли температуры. Следовательно, полученное равенство есть дифференциальный аналог соотношения

$$V \sim T^{-3},$$

или (если опять учесть уравнение состояния)

$$p \sim T^4.$$

В координатах p, T – это парабола четвертой степени (адиабата на рисунке 1). А вот температурная зависимость давления насыщенного пара (кривая насыщения на рисунке 1) – гораздо более резкая. В этом можно убедиться, скажем, при помощи таблиц или построив кривую $p_n(T) \sim e^{-\frac{r}{RT/M}}$, приближенно описывающую эту зависимость, где r – удельная теплота испарения (для воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг). А это означает, что кривая $p_a \sim T^4$ с уменьшением температуры, начиная с $T = T_0$, может пересечь кривую насыщения $p_n(T)$ при некоторой температуре T_p , называемой точкой росы.

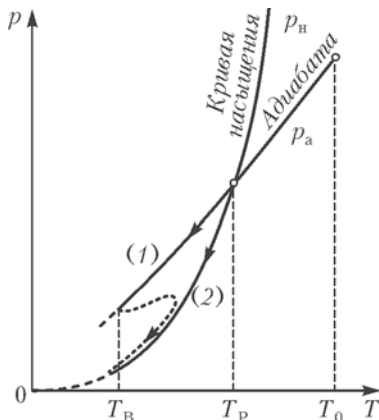


Рис. 1

Дальше возможны два сценария. Согласно первому из них (1), пар проскочит далее по адиабате, так что его давление будет все больше и больше отличаться от давления насыщения. Но при каком-то значении пересыщения $p_B/p_n > 1$ и температуре T_B ситуация станет невыносимой: произойдет бурная спонтанная (самопроизвольная) конденсация, т.е. образуется множество капель (туман), будет выброшена в несущий газ теплота конденсации, поток подогреется и вернется к кривой $p_n(T)$. Эта температура T_B называется точкой Вильсона (вспомним о его «туманной камере», сыгравшей важную роль в исследовании ядерных процессов).

Итак, часть пара превратится в жидкие капельки, которые уже не будут участвовать в создании давления на стенки сопла; более того, расширяющемуся пару придется ускорять эту пассивную массу. Явные потери тяги двигателя!

Но возможен и другой сценарий (2). Если как-то заставить пар идти вдоль термодинамически равновесной кривой $p_n(T)$, то «лишняя» теплота конденсации будет выделяться непрерывно, способствуя дальнейшему ускорению, так что в конце концов, при $T \rightarrow 0$, в кинетическую энергию перейдет и энергия фазового превращения. Поэтому, добавив в правую часть уравнения (*) молярную теплоту конденсации Mr , получим следующую оценку для максимальной скорости:

$$v_{\max}^{(2)} = \sqrt{\frac{8RT_0}{M} + 2r} \approx 2900 \text{ м/с}.$$

Выходит, равновесная конденсация могла бы помочь получить дополнительный импульс тяги!

На рисунке 2 качественно изображено изменение температуры и скорости вдоль оси сопла x , которая для наглядности направлена вниз (ведь ракета стоит вертикально).

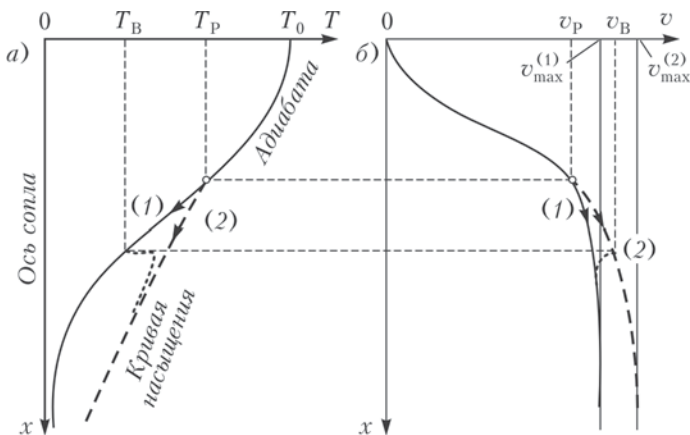


Рис. 2

Но как заставить пар идти по второму сценарию? Для этого можно бы «подсыпать» дополнительные (гетерогенные) ядра конденсации – например, микропылинки или ионы (всего этого и так много в реальной воде), на которых пар мог бы «оседать», не дожидаясь большого пересыщения. А еще можно учесть...

Однако, – заметил Студент, – кофе-то остыл. Придется снова повышать его энтальпию!

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



НОВАЯ ГАЛАКТИКА И ВСЕ ЕЕ ПОЛЯ

А. Стасенко

Сколько моделей Вселенной создано на сегодняшний день! Вселенная Эйнштейна и вселенная Фридмана, вселенная Леметра и вселенная Эддингтона – целый набор вселенных! Все эти модели отражали определенный уровень физических представлений, достигнутый к моменту их построения.

Попробуем и мы «создать» если не вселенную, то хотя бы галактику. И пусть эта Новая галактика состоит из звезд одинаковой массы, несущих одинаковый электрический заряд. И, как всякая приличная галактика, пусть она вращается – конечно, вокруг оси и, конечно, с постоянной угловой скоростью. А вот отличается она от всех других галактик тем, что представляет собою бесконечно длинный цилиндр, вращающийся вокруг своей оси. Можно приписать ей и другие свойства. Например, пусть концентрация звезд (т.е. их количество в единице объема) постоянна.

Как видим, «создать» галактику не так уж сложно. Но чтобы разобраться в том, что в ней происходит, придется подумать.

Прежде всего, ясно, что каждая звезда будет находиться в поле тяготения других звезд. «Напряженность» этого поля тяготения (или силу, действующую на единицу массы, или локальное ускорение тяготения) обозначим по привычке буквой \vec{g} . Тогда гравитационная сила, действующая на выделенную звезду массой m , равна $m\vec{g}$. Кроме того, обладая электрическим зарядом q , каждая звезда испытывает на себе действие электрической силы $q\vec{E}$, где \vec{E} – напряженность электрического поля, созданного всеми другими звездами, кроме нее самой. Далее, находясь во вращающейся системе, каждая звезда обладает центростремительным ускорением, равным $\omega^2 r$, где \vec{r} – радиус-вектор данной звезды, начало которого находится на оси, а ω – угловая скорость вращения. Все эти силы и ускорения изображены на рисунке 1. Но почему там поля \vec{g} и \vec{E} строго перпендикулярны оси вращения? Это потому, что «по построению» наша Новая галактика бесконечна в осевом направлении; значит, в

любом ее поперечном сечении осевые компоненты полей взаимно уничтожаются: сколько звезд находится «над» этим сечением, столько же имеется и «под» ним.

Итак, электрическое поле, созданное всеми заряженными звездами внутри цилиндра радиусом r , «торчит» *наружу* во все стороны. Но говорить о поле, что оно «торчит», как-то неблагозвучно, поэтому физики придумали другие слова: поток поля через поверхность цилиндра радиусом r и длиной x (и, значит, площадью $2\pi r x$) равен $2\pi r x E$. Оказывается, этот поток создается всеми зарядами внутри этого цилиндра, т.е. в объеме $\pi r^2 x$. И если концентрация звезд n , а заряд каждой из них q , то суммарный электрический заряд внутри этого цилиндра равен $\pi r^2 x n q$. Так вот, поток электрического поля через поверхность цилиндра равен суммарному заряду внутри, деленному на электрическую постоянную ϵ_0 :

$$2\pi r x E = \frac{\pi r^2 x n q}{\epsilon_0}.$$

(Этот факт можно проверить на примере точечного заряда q , окружив его сферой радиусом r : $4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$, откуда следует известное выражение для напряженности поля, непосредственно вытекающее из закон Кулона: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.) Значит, величина напряженности электрического поля на расстоянии r от оси равна

$$E = \frac{nqr}{2\epsilon_0},$$

а вектор напряженности направлен наружу вдоль радиуса-вектора \vec{r} .

Точно так же поток напряженности \vec{g} гравитационного поля через поверхность цилиндра *внутри* его связан с суммарной массой внутри цилиндра $\pi r^2 x n m$ аналогичным законом:

$$2\pi r x g = -\pi r^2 x n m \cdot 4\pi G,$$

где G – постоянная тяготения. (Отсюда для точечной массы m_0 можно получить закон Ньютона: $m_0 g = -G \frac{m_0 m}{r^2}$.) Значит, на-

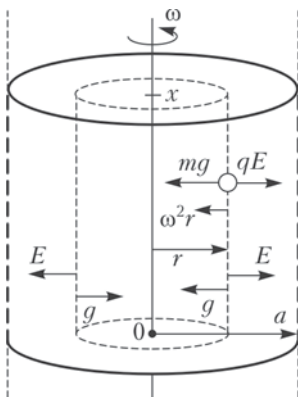


Рис. 1

пряженность поля тяготения на расстоянии r от оси цилиндра равна

$$g = -2Gnm\pi r.$$

А теперь запишем уравнение движения звезды массой m , находящейся на расстоянии r от оси вращения Новой галактики (см. рис.1):

$$m\vec{g} + q\vec{E} = m\omega^2\vec{r},$$

или в проекции на направление вдоль радиуса:

$$-2mGmn\pi r + \frac{qnqr}{2\epsilon_0} = -m\omega^2 r.$$

Отсюда найдем угловую скорость вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{mn}{2} \left(4\pi G - \left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_0} \right)}.$$

Так как мы предположили, что звезды равномерно распределены в пространстве, т.е. n постоянно внутри нашей цилиндрической галактики, то угловая скорость тоже одинакова во всех ее точках. Следовательно, наша галактика вращается как твердый стержень.

Далее, линейная (окружная) скорость звезд равна ωr . Но поскольку каждая звезда несет электрический заряд, ее перемещение создает электрический ток, плотность которого равна

$$j = qn\omega r.$$

Видно, что в наших предположениях плотность тока линейно растет от центра к периферии галактики: $j \sim r$. И так как все заряды движутся по окружностям, то и токи будут кольцевыми.

Выделим внутри нашей галактики колечко, содержащее большое количество звезд, но достаточно малого поперечного сечения — так называемое *элементарное* колечко. На рисунке 2,а показано на-

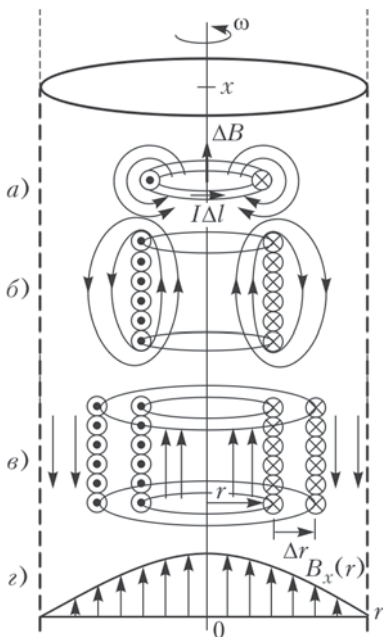


Рис. 2

правление движения звезд, т.е. направление элемента тока $I d\vec{l}$ внутри этого колечка, а также структура магнитного поля, порожденного элементарным током.

Возьмем теперь целый набор таких токов, имеющих одинаковый радиус r . И пусть их много, так что длина этого набора вдоль оси вращения галактики много больше радиуса, т.е. $x \gg r$. Очевидно, мы получим нечто похожее на соленоид (рис.2,б). Как известно, магнитное поле \vec{B} внутри соленоида постоянно, а снаружи равно нулю. Это не значит, что снаружи его вовсе нет. Просто поскольку все линии поля \vec{B} замкнуты, т.е. нигде не начинаются и нигде не кончаются, то весь пучок линий \vec{B} , прошедших через поперечное сечение соленоида πr^2 , должен пройти и через бесконечную площадь поперечного сечения вне соленоида. А так как напряженность любого поля пропорциональна, в частности, числу его линий, пронизывающих единичную площадку (или плотности потока поля), то эта напряженность и стремится к нулю всюду вне соленоида при условии $x/r \rightarrow \infty$.

Рассмотрим еще один кольцевой слой токов, радиусом $r + \Delta r$. Можно представить, что внутренний соленоид окружили внешним соленоидом (рис.2,в). Тогда магнитные поля обоих соленоидов сложатся внутри внутреннего соленоида, а вне внешнего соленоида поле по-прежнему останется равным нулю.

Из этих рассуждений ясно, что в нашей галактике магнитное поле будет наибольшим на оси и нулевым снаружи. Но как найти зависимость напряженности поля от радиуса?

Обратимся снова к рисунку 2,в. Поскольку наше осевое магнитное поле порождается кольцевыми токами, то очевидно, что его приращение связано с приращением тока при перемещении по радиусу: $\Delta B_{r+\Delta r} \sim j \Delta r$. Подставив сюда выражение для плотности тока, получим $\Delta B \sim q n \omega r \Delta r$. Мы опустили здесь индекс $r + \Delta r$, потому что и без него теперь понятно, что речь идет о приращении поля с изменением радиуса. Далее, поскольку в нашей галактике, по предположению, $q n \omega$ есть постоянная величина, полученную пропорциональную зависимость можно записать в виде

$$\Delta B \sim r \Delta r .$$

Теперь нужно сложить все элементарные поля, порожденные элементарными соленоидами, т.е. проинтегрировать последнее выражение. Но кто же не знает, что при интегрировании линейной функции получается квадратичная. Поскольку, как мы уже выяснили, магнитное поле должно быть наибольшим на

оси и нулевым на окраине галактики, т.е. при $r = a$, эта квадратичная зависимость должна выглядеть так:

$$B \sim \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right).$$

Графиком этой функции является парабола (рис.2,z). А вот точный результат:

$$B = \mu_0 \frac{qn\omega a^2}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right),$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

Итак, мы нашли все поля в Новой галактике, вращающейся с постоянной угловой скоростью и состоящей из электрически заряженных звезд. И чтобы еще раз напомнить, как направлены векторные линии этих полей, введем индексы, соответствующие координатам цилиндрической системы: x — осевая, r — радиальная координаты. Тогда полученные напряженности полей лучше обозначить так: B_x , E_r , g_r .

Все это хорошо, поскольку на примере нашей Новой галактики мы смогли еще раз показать, как «работают» законы электромагнитостатики. Но как насчет устойчивости такой галактики? Ведь стоит где-то образоваться сгустку или разрежению звезд, как вся система начнет разваливаться. Случайно ли, что такие «галактики» не обнаружены?

Однако, это уже другой вопрос, тоже тонкий и не менее интересный.

В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

С. Серохвостов

Во многих учебниках физики формулы для амплитуды тока и сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока, состоящей из катушек индуктивности, резисторов и конденсаторов, даются без вывода. Однако вдумчивым школьникам всегда хочется, чтобы «все было по-честному», чтобы было понятно, почему формулы имеют именно такой вид. Покажем, как можно получить эти формулы, используя только школьные знания по физике.

Рассмотрим самый простой вариант схемы: пусть к источнику переменного напряжения U подключена электрическая цепь из соединенных последовательно резистора сопротивлением R , конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис.1).

Если характерный размер контура x и круговая частота переменного напряжения источника ω таковы, что $x \ll 2\pi c/\omega$, где c – скорость света в вакууме, а $2\pi c/\omega$ – длина электромагнитной волны, соответствующая данной частоте, то сила

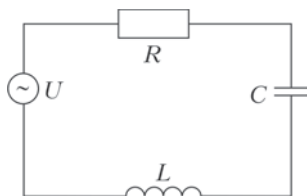


Рис. 1

тока в каждой точке нашей цепи в один и тот же момент времени будет иметь практически одну и ту же фазу (естественно, эта фаза будет меняться со временем, но меняться она будет во всех точках одинаково). Это предположение дает нам возможность считать, что в цепи течет так называемый квазистационарный переменный ток, и применить для анализа цепи правила Кирхгофа.

Согласно первому правилу Кирхгофа, сумма токов, втекающих в любую точку разветвления цепи, равна сумме токов, вытекающих из этой точки. Второе правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на элементах простого (неразветвленного) замкнутого контура равна алгебраической сумме всех ЭДС в этом контуре. В нашей схеме

напряжение падает на конденсаторе $\left(\frac{q}{C}\right)$ и на резисторе (IR) , а в качестве ЭДС выступают источник напряжения (U) и катушка, в которой возникает ЭДС индукции $\left(-L \frac{dI}{dt}\right)$. Поэтому запишем

$$U - L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + IR. \quad (1)$$

Здесь мы обозначили заряд на конденсаторе буквой q , а силу тока в цепи — буквой I .

Так как напряжение источника изменяется по синусоидальному закону, то логично считать, что сила тока в цепи, заряд и напряжение на конденсаторе будут изменяться со временем также синусоидально и с той же частотой. Пусть, для определенности, $q = q_0 \sin \omega t$. Тогда

$$I = q' = q_0 \omega \cos \omega t.$$

На практике удобнее измерять именно силу тока, а не заряд на конденсаторе, поэтому положим $q_0 = I_0/\omega$ и получим

$$q = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t, \quad I = I_0 \cos \omega t.$$

Теперь уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$U = -LI_0 \omega \sin \omega t + RI_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t.$$

Очевидно, что фаза напряжения источника отличается от фазы силы тока в цепи на некоторый угол φ . Пусть

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

В этом случае формула (1) будет иметь вид

$$U_0 \cos(\omega t + \varphi) = -LI_0 \omega \sin \omega t + RI_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t.$$

Преобразуем выражение в левой части при помощи формулы для косинуса разности углов:

$$\begin{aligned} U_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \\ = -LI_0 \omega \sin \omega t + RI_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Сгруппируем теперь отдельно члены уравнения, содержащие $\cos \omega t$, и члены, содержащие $\sin \omega t$:

$$\left(-U_0 \sin \varphi + LI_0 \omega - \frac{I_0}{\omega C}\right) \sin \omega t = (-U_0 \cos \varphi + RI_0) \cos \omega t.$$

Эта формула должна быть верна для любого значения t . Такое возможно, только если множители при синусе и косинусе будут оба равны нулю, т.е. если

$$U_0 \sin \varphi = LI_0\omega - \frac{I_0}{\omega C} \quad (2)$$

и

$$U_0 \cos \varphi = RI_0. \quad (3)$$

Возведем выражения (2) и (3) в квадрат и сложим. В результате получим

$$U_0^2 = I_0^2 \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right).$$

Отсюда нетрудно получить выражение для I_0 :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (4)$$

Эта формула очень похожа на закон Ома для участка цепи, если за сопротивление принять величину

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Поэтому Z часто называют комплексным сопротивлением, или импедансом цепи.

Если мы знаем I_0 , то мы знаем силу тока в любой момент времени, так как $I = I_0 \cos \omega t$. Однако для полного решения задачи нам следует ответить еще на один вопрос: а чему равен сдвиг фаз φ ? Для этого разделим друг на друга уравнения (2) и (3) и получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (5)$$

Взяв арктангенс от правой части этого равенства, получим искомый угол, после чего задача будет полностью решена.

Как видим, формулы (4) и (5) получить действительно достаточно просто. Ну а теперь, когда вы уже почувствовали веру в собственные силы и знания, найдите самостоятельно силу тока I через источник и сдвиг фаз между U и I для схемы, изображенной на рисунке 2.

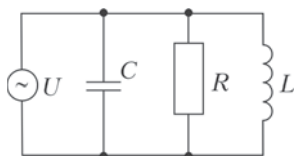


Рис. 2

КОВЧЕГ ЗАВЕТА И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МАШИНА

А.Стасенко

...И поставили ковчег Божий на новую колесницу... и повезли ее с ковчегом Божиим... И когда дошли до гумна Нахонова, Оза простер руку свою к ковчегу Божию и взялся за него; ибо волы наклонили его. Но Господь прогневался на Озу; и порастил его Бог там же за дерзновение, и умер он там у ковчега Божия.

2-я книга Царств, 6:3-7

Тут явно речь идет о нарушении техники безопасности. Причем не только один Оза Аминадавович (который был для ковчега «своим» человеком) пострадал вследствие неосторожности: когда нехорошие филистимляне захватили этот ковчег и доставили его в город Вефсамис, «...порастил Он жителей Вефсамиса за то, что они заглядывали в ковчег Господа, и убил из народа пятьдесят тысяч семьдесят человек».

Неслучайно в Ветхом завете даны четкие рекомендации по обращению с ковчегом, по устройству двора скинии – шатра над ковчегом, по ограничению числа «посвященных», имеющих право входить в скинию: «...Все столбы вокруг двора должны быть соединены связями из серебра; крючки у них из серебра, а подножия к ним из меди... Вина и крепких напитков не пейте... когда входите в скинию собрания, чтобы не умереть». Причем на посвященном должны быть «только льняные одежды, одежды священные»; запрещено носить одежды из разных материалов, например шерсти и льна.

Все это очень напоминает инструкции по технике безопасности для современных электромонтеров, а внезапная кончина Озы очень похожа на поражение электрическим разрядом. Действительно, серебряные провода и «подножия к ним из меди» напоминают заземление, а запрет на одежды разного сорта обусловлен тем, что трение различных материалов друг о друга приводит к электризации.

Известен так называемый трибоэлектрический ряд веществ (ряд Фарадея), в котором предыдущее тело электризуется положительно, а последующее – отрицательно: (+) мех, фланель, слоновая кость, перья, горный хрусталь, флинтглас, бумажная ткань, шелк, дерево, металлы, сера (–). А вот современный ряд (по Лемике), учитывающий и вещества, которые были неизвестны Фарадею: *положительный* конец ряда – стекло, человеческий волос, нейлон, шерсть, шелк, вискоза, хлопок, бумага, лубяное волокно, сталь, эбонит, ацетатный шелк, синтетическая резина, дакрон, орлон, саран, полиэтилен – *отрицательный* конец ряда. Вообще, при трении двух диэлектриков положительно заряжается диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью ϵ .

С электризацией трением человек встречается в повседневном быту. Если провести по волосам пластмассовой расческой, то она зарядится отрицательно, а волосы – положительно (в том, что расческа заряжена, легко убедиться, поднеся ее к струйке воды, текущей из крана). Если потереть резиновой палочкой о кошачью шерсть (да не обидится кошка), то палочка зарядится отрицательно. Если в темноте быстро стащить с себя или с приятеля современную синтетическую одежду, можно наблюдать сполохи микромолний.

Уверенно и контролируемо можно разделять заряды при помощи так называемых электростатических генераторов.

Вот как описана электрическая машина в учебнике физики столетней давности (рис.1). Главная часть этой машины –

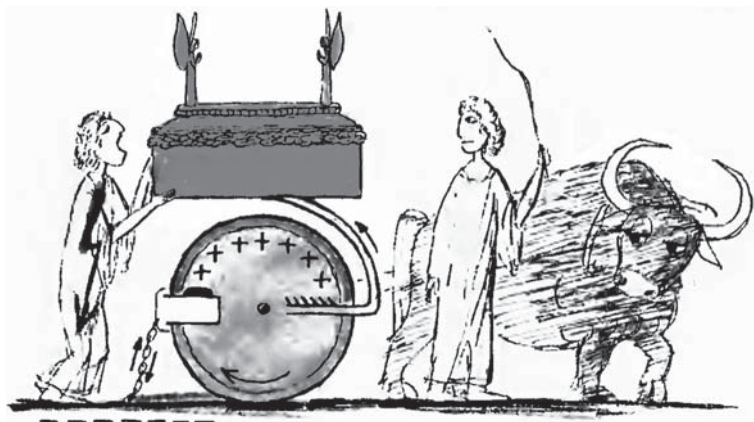


Рис. 1

вращающийся стеклянный круг. В лаборатории он приводится в движение при помощи специальной ручки, а в качестве элемента колеса телеги – силой тяги волов, вот почему электрическая машина изображена на рисунке в упряжке. К стеклянному кругу прижимаются деревянные дощечки (подушки), покрытые амальгамированной кожей. Вследствие трения круга о подушки, стекло электризуется положительно, а кожа – отрицательно. Положительный заряд круга, перемещаясь при вращении к гребенкам (раздвоенный металлический стержень с остриями, направленными к кругу), индуцирует в них отрицательный заряд, стекающий на стекло и нейтрализующий его. В результате металлизированное тело («ковчег»), соединенное проводником с гребенками, все более и более заряжается положительно, а электроны с подушек стекают в землю по металлической цепочке, влачащейся за колесом. На рисунке стрелками показаны направления тока I (или v_+) и скорости v_- перемещения электронов (они противоположны друг другу). Через некоторое время после начала работы машины будет достигнута наибольшая разность потенциалов между ковчегом и землей, и накопление заряда уравнивается его потерями в атмосферу. Теперь, если замкнуть ковчег и землю каким-либо проводником (например, телом Озы), через него пройдет электрический разряд.

Чтобы провести численные оценки, выпишем прежде всего некоторые данные о ковчеге: «Сделай ковчег из дерева ситтим; длина ему два локтя с половиною, и ширина ему полтора локтя... И обложи его чистым золотом; изнутри и снаружи покрой его ...Сделай также крышку из чистого золота... И положи крышку на ковчег сверху».

Итак, это был ящик с хорошо проводящими стенками, и в нем «...ничего не было, кроме двух каменных скрижалей, которые положил туда Моисей...» (3-я книга Царств, 8:9). Для простоты заменим ящик телом, у которого только один характерный размер – радиус R , т.е. шаром. Оценим этот радиус из условия одинаковости объемов:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2,5 \times 1,5 \times 1,5 = 5,6 \text{ кубических локтей}$$

(вообразите только себе «кубический локоть»!), откуда $R \approx 1,1$ локтя $\approx 0,5$ м.

Далее, если заряд этого шара равен q , то напряженность электрического поля на его поверхности равна $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Она не должна превосходить предельной величины для сухого воздуха, равной, как известно, $E_* = 3 \cdot 10^6$ В/м, откуда для предель-

ного заряда шара получаем

$$q_* = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_* \approx \frac{0,25}{9 \cdot 10^9} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ Кл} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл},$$

а для его поверхностной плотности –

$$\sigma_* = \epsilon_0 E_* \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2.$$

Конечно, у ящика-параллелепипеда есть грани и углы, где радиусы кривизны меньше, чем принятое нами значение R , и где, следовательно, напряженность поля будет больше, что приведет к локальной утечке заряда в воздух и уменьшению значения электрического заряда на ковчеге. Однако, Писание не сообщает деталей конструкции ковчеге. Во всяком случае, видно, что при высоте ковчеге над поверхностью земли порядка 1–2 м разность потенциалов между ним и землей может достигать не одну тысячу вольт, что гораздо больше напряжения, необходимого для работы различных электробытовых приборов.

К настоящему времени созданы более совершенные устройства для разделения зарядов путем трения. Так, во многих физических кабинетах школ и институтов имеются электрофорные машины. Нечто подобное можно сделать и самостоятельно. Например, на рисунке 2 изображен самодельный электростати-

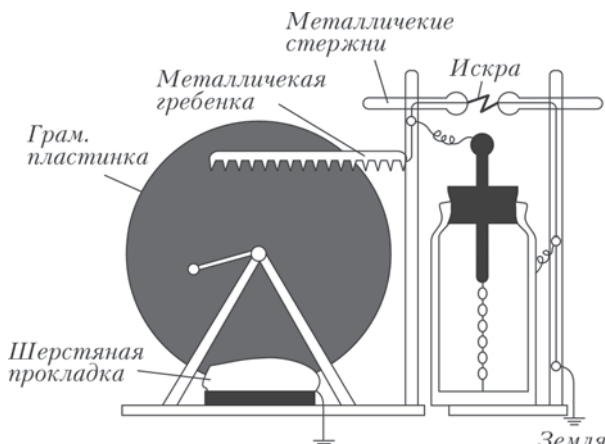


Рис. 2

ческий генератор с граммофонной пластинкой, приводимой во вращение ручкой (очевидно, что можно взять любую круглую пластинку из диэлектрика). Только здесь возникающую разность потенциалов предлагается подавать на внутреннюю и внешнюю обкладки стеклянной банки (простейший конденса-

тор). И вместо трагедии Озы можно будет наблюдать искру в воздухе.

Для серьезных научных исследований (например, для ускорения элементарных частиц) используются электростатические генераторы Ван-де-Граафа, в которых заряды переносятся к шару-накопителю движущейся замкнутой лентой. Подобные электростатические генераторы позволили достичь напряжений до 20 мегавольт при скорости перемещения зарядов $v \sim 10$ м/с. А поверхностная плотность зарядов ограничена величиной $\sigma \approx (3 - 4) \cdot 10^{-5}$ Кл/м², как мы и получили выше. Значит, возникающий ток равен (при ширине ленты $b \sim 1$ м)

$$I = \sigma b v \approx (3 - 4) \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2 \cdot 1 \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с} \lesssim 10^{-3} \text{ А}.$$

В заключение, в порядке покаяния за вольное (может быть, кощунственное) обращение к древним свидетельствам, приведем слова одного философа: «Наука похожа на детективный рассказ. Все факты подтверждают определенную гипотезу, но правильной оказывается, в конце концов, совершенно другая гипотеза».

КАК ИССЛЕДОВАТЬ МАГНИТНУЮ КАТУШКУ

С.Мягмарсурэн

Обсудим один из возможных методов измерения магнитной индукции и энергии магнитного поля катушки.

Энергию магнитного поля катушки индуктивности можно определить, используя взаимные преобразования энергии: электрической – магнитной – тепловой – электрической. Соберем установку, электрическая схема которой показана на рисунке 1.

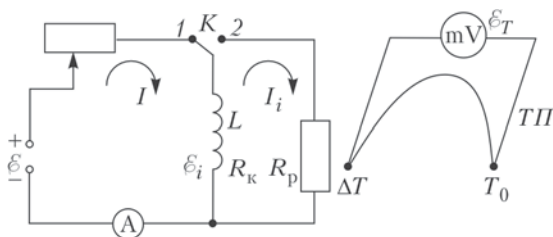


Рис. 1. Электрическая схема установки

В качестве индукционной катушки мы использовали электромагнит, состоящий из дроссельной катушки и сердечника с двумя полюсными наконечниками, повернутыми плоскими сторонами друг к другу. При замыкании ключа K в положение 1 ток I проходит по катушке индуктивностью L , за счет чего в катушке образуется ЭДС самоиндукции $\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}$. Согласно правилу Кирхгофа,

$$I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i}{R}, \text{ или } \varepsilon = IR - \varepsilon_i = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Здесь R – сумма сопротивления реостата и омического сопротивления катушки. За время dt источник электрической энергии совершает работу, равную

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + L I dI.$$

Первое слагаемое в этой формуле выражает тепло Джоуля–

Ленца, которое выделяется на сопротивлении R , а второе – дополнительную работу, обусловленную явлением самоиндукции. Следовательно, дополнительная работа, расходуемая на увеличение тока в цепи от 0 до значения I , является энергией магнитного поля W :

$$W = \int_0^t L I dI = \frac{L I^2}{2}.$$

А теперь замкнем ключ в положение 2 – в правой цепи ток самоиндукции I_i проходит через омическое сопротивление катушки R_k и сопротивление резистора R_p , на которых и выделяются количества теплоты Q_k и Q_p соответственно. Таким образом, энергия, запасенная в магнитном поле катушки, переходит в электрическую, а затем – в тепловую.

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{W}{Q_p} = \frac{R_k + R_p}{R_p}.$$

В этом выражении сопротивления R_k и R_p есть известные и точно измеряемые параметры. Поэтому для определения W нам придется узнать величину Q_p .

Используем уравнение теплового баланса:

$$Q_p = mc\Delta T,$$

где m – масса материала, имеющего сопротивление R_p , c – удельная теплоемкость того же материала, ΔT – изменение его температуры. Величину ΔT измеряют термопарой ТП – для этого измерительный контакт прибора прикрепляется внутри витков резистора сопротивлением R_p , а другой, сравнивающий, контакт поддерживают при комнатной температуре T_0 (см. рис.1). Температурная разность контактов термопары ΔT прямо пропорциональна межконтактной разности потенциалов, т.е. термо-ЭДС \mathcal{E}_T . С учетом этого факта получим

$$Q_p = mc \frac{\mathcal{E}_T}{\delta},$$

где δ – чувствительность термопары, измеряемая в милливольт-тах на кельвин.

Если выбрать сопротивление резистора R_p значительно большим, чем сопротивление катушки R_k , то эффект преобразования магнитной энергии в тепловую хорошо прослеживается. Поэтому в качестве резистора используют проволоочную спираль, сделанную из сплава с большим удельным сопротивлением. В подавляющем большинстве случаев для такого металличес-

кого сплава удельная теплоемкость неизвестна, так что нам придется определить эту величину. Для этого мы придумали маленькую хитрость.

Соберем электрическую схему – такую же, как на рисунке 1, только без катушки индуктивности. Резистор, по которому течет ток I' в течение времени t , нагревается, и в нем выделяется некоторое количество теплоты. Если при этом не возникает никаких других форм энергии, то, по закону сохранения энергии,

$$I'^2 R_p t = mc \Delta T'.$$

Используя ту же термопару, определим новое изменение температуры: $\Delta T' = \frac{\mathcal{E}'_T}{\delta}$. Поэтому можно записать

$$\frac{mc}{R_p \delta} = I'^2 \frac{t}{\mathcal{E}'_T} = \text{const}.$$

В этом выражении \mathcal{E}'_T пропорционально времени t (с момента включения ключа до окончания измерения). Величины I' , \mathcal{E}'_T , t экспериментально измеряются. Таким образом, во второй части опыта можно определить удельную теплоемкость c для любых электропроводящих материалов.

Используя выражения для количества теплоты Q_p и удельной теплоемкости c , для энергии магнитного поля получим

$$W = \frac{LI^2}{2} = Q_p = A \mathcal{E}_T,$$

где A – постоянная прибора, которая равна

$$A = (R_k + R_p) \frac{mc}{R_p \delta} = (R_k + R_p) I'^2 \frac{t}{\mathcal{E}'_T}.$$

На самом деле, энергия магнитного поля является функцией двух переменных – силы тока I и расстояния между полюсами электромагнита d . Для определения энергии магнитного поля в зазоре электромагнита нами экспериментально построены графики зависимости термо-ЭДС от силы тока при разных значениях d (рис.2). Из графиков видно, что зависимость $\mathcal{E}_T(I)$ – квадратичная. Значит, зависимость термо-ЭДС от квадрата тока будет линейной. Таким образом, для нашего прибора получают-ся вольт-амперные характеристики вида $\mathcal{E}_T(I, d) = K(d)I^2$, а их коэффициенты $K(d)$ являются, в свою очередь, функцией d . Это приводит к следующему выражению для W :

$$W(I, d) = A \mathcal{E}_T(I, d) = AK(d)I^2,$$

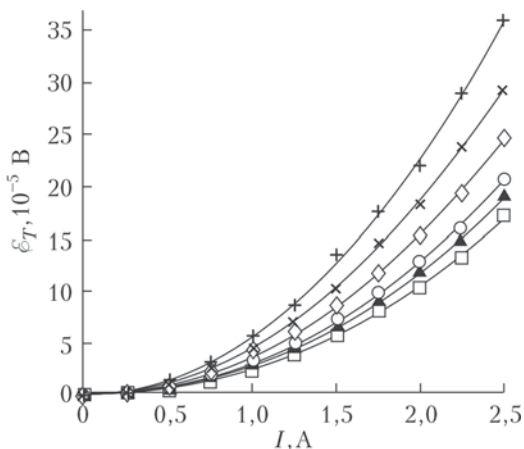


Рис. 2. Зависимость термо-ЭДС от силы тока при разных значениях межполюсного расстояния d (6, 9, 13, 20, 27 и 35 мм, если двигаться сверху вниз)

где коэффициент $AK(d)$, согласно формуле $W = \frac{LI^2}{2}$, будет выражать индуктивность катушки L , точнее $L/2$.

Наконец, используя вольт-амперные характеристики, построим градуировочный график зависимости $K(d)$ (рис.3). Такая градуировка и представляет собой измеритель энергии магнитного поля, создающегося в данном электромагните при любых значениях силы тока и расстояния между его полюсами. А

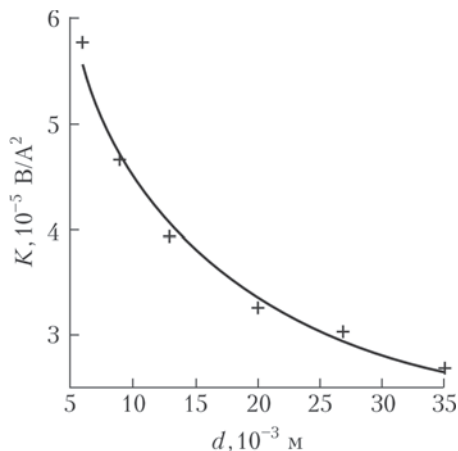


Рис. 3. Градуировочный график зависимости K от d

последнее выражение для $W(I, d)$ является эмпирически полученной нами формулой (основанной на опыте) для определения магнитной энергии данного электромагнита.

Теперь приступим к определению магнитной индукции поля. Разделив выражение для $W(I, d)$ на объем воздушного зазора между полюсами электромагнита, получим объемную плотность магнитной энергии (всеми не-

желательными краевыми эффектами мы будем пренебрегать):

$$w(I, d) = \frac{AK(d)}{Sd} I^2,$$

где S – площадь поперечного сечения полюса электромагнита. С другой стороны, объемная плотность магнитного поля прямо пропорциональна квадрату магнитной индукции B в данном месте пространства:

$$w(I, d) = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

где μ – относительная магнитная проницаемость вещества, μ_0 – магнитная постоянная. Из сопоставления двух последних выражений следует, что магнитная индукция и сила тока связаны соотношением

$$B(I, d) = \sqrt{\frac{2\mu\mu_0 AK(d)}{Sd}} I.$$

Поскольку для данного электромагнита градуировка $K(d)$ уже установлена, можно графически построить семейство зависимости $B(I, d)$ (рис.4). Из полученных графиков магнитная индук-

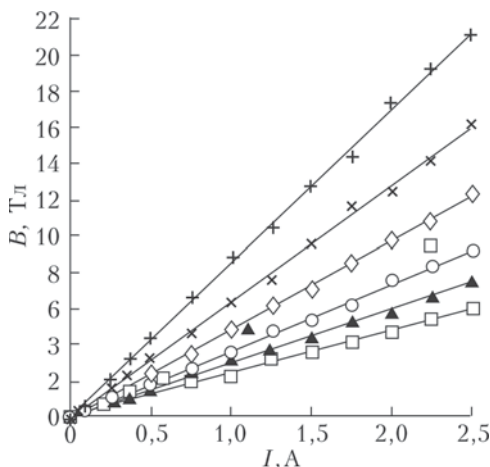


Рис. 4. Зависимость магнитной индукции от силы тока при разных значениях межполюсного расстояния d

ция непосредственно определяется без измерения и без вычисления при разных значениях либо d , либо I . Таким образом, мы получили эмпирическую формулу и создали градуировочные кривые для определения индукции магнитного поля.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ И ВЫБОР РЕЖИМА

Г.Бакунин

Аналогия – один из важнейших инструментов исследования. Это неоднократно подчеркивалось как известными учеными, так и историками науки. Воспользуемся этим инструментом и обсудим сходство и различие «мощностных» характеристик хорошо известных электрических устройств.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь – модель электронагревателя, состоящую из источника, имеющего ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r , и нагрузки – резистора сопротивлением R (рис.1). Вычислим полезную мощность такого устройства, опираясь на закон Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R.$$

График зависимости $P(R)$ приведен на рисунке 2. Несложно

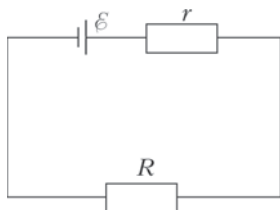


Рис. 1

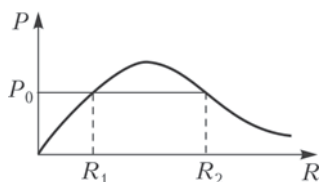


Рис. 2

заметить, что график обладает максимумом, т.е. имеются две возможности обеспечить полезную мощность P_0 устройства в зависимости от внешней нагрузки R_1 или R_2 . Большому значению R при этом соответствует меньшее значение тока в цепи.

Таким образом, даже в простейшей электрической машине – электронагревательном приборе – существует возможность выбора режима работы.

Более сложной оказывается ситуация в случае электрического мотора постоянного тока. Здесь в цепи якоря генерируется

индукционная ЭДС \mathcal{E}_i , и закон Ома записывается в виде

$$U - \mathcal{E}_i = IR,$$

где U – внешнее напряжение, а R – сопротивление якоря. Естественно предположить, что индуцированная ЭДС пропорциональна частоте вращения ω якоря:

$$\mathcal{E}_i = \Phi_0 \omega,$$

где Φ_0 – размерный коэффициент, равный максимальному потоку магнитной индукции через рамку якоря. Анализ выражения для полной мощности:

$$UI = \mathcal{E}_i I + I^2 R$$

показывает, что полезная мощность связана с членом $\mathcal{E}_i I$, где ток якоря I зависит линейно от частоты вращения ω :

$$I = I(\omega) = \frac{U - \mathcal{E}_i(\omega)}{R} = \frac{U - \Phi_0 \omega}{R}.$$

Следовательно, зависимость полезной мощности электрической машины постоянного тока от частоты вращения якоря имеет вид

$$P(\omega) = \mathcal{E}_i(\omega) I(\omega) = \frac{\Phi_0}{R} (\omega(U - \Phi_0 \omega)).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, виден максимум мощности, однако теперь выбор режима зависит от частоты (рис.3).

Заметим, что нагрузка в данной задаче связана с вращательным моментом, который способен создать электромотор:

$$M(\omega) = \frac{P(\omega)}{\omega} = \frac{\Phi_0}{R} (U - \Phi_0 \omega).$$

Стабильная работа мотора

обеспечивается балансом этого момента и момента M_0 , создаваемого внешней нагрузкой. Например, если мотор равномерно поднимает на веревке груз, то момент нагрузки равен произведению силы натяжения веревки, которая равна весу груза, на радиус вала. Холостой ход электрической машины соответствует значению $M_0 = 0$. В случае ненулевой нагрузки частота вращения ω_* определяется балансом моментов (рис.4):

$$M(\omega_*) = M_0.$$

Что же получается, электрический мотор сам выбирает понравившуюся ему мощность? Действительно, если момент на-

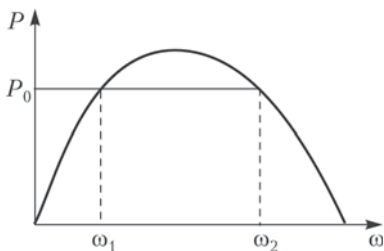


Рис. 3

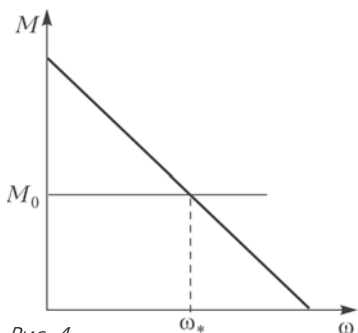


Рис. 4

грузки меньше момента, создаваемого мотором, то ротор раскручивается все сильнее и сильнее, пока частота не достигнет значения ω_* . В противоположном случае, когда момент нагрузки больше момента, создаваемого мотором, ротор тормозится до тех пор, пока баланс моментов не восстановится. Иными словами, значение ω_* соответствует положению устойчи-

вого равновесия. Следовательно, несмотря на формальную возможность выбора частоты вращения ротора для заданной величины полезной мощности P_0 , ротор раскручивается до тех пор (до такой частоты ω_*), пока не выполнится условие равенства моментов. Мощность в этом случае определяется внешней нагрузкой M_0 :

$$P_* = M_0 \omega(M_0) = M_0 \left(\frac{U}{\Phi_0} - \frac{R M_0}{\Phi_0^2} \right) = \frac{M_0}{\Phi_0} \left(U - \frac{R}{\Phi_0} M_0 \right).$$

Этот простой пример показывает, как непросто навязать свою волю машинам, даже если это всего лишь электрические машины постоянного тока.

КАК СТУДЕНТ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ИЗМЕРЯЛ

А.Стасенко

Приступив к изучению труда Фарадея, я установил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не представленным в форме обычных математических символов... Фарадей видел силовые линии, пронизывающие все пространство...

Дж.Максвелл

Как-то на лабораторной работе студент намотал сотни метров проволоки в виде соленоида, да такого длинного, что магнитное поле в его середине можно было считать пространственно однородным, и подключил его к источнику переменного тока с регулируемой частотой ω (рис.1). И задумался: как бы измерить индукцию магнитного поля?

Еще в позапрошлом веке было известно, что если через площадь некоторой проводящей рамки, например в виде окружности, со временем изменяется поток вектора магнитной индукции Φ , то в этой рамке возникает электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Таким образом, можно сказать, что ЭДС \mathcal{E} – это скорость изменения потока вектора магнитной индукции через рамку.

Пусть, например, кольцо радиусом r находится в магнитном поле, изменяющемся со временем по гармоническому закону

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

Тогда поток вектора магнитной индукции через площадь кольца будет изменяться по закону

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \cos \omega t.$$

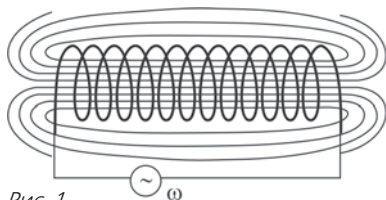


Рис. 1

Далее, если рамка проводящая, то ЭДС \mathcal{E} вызовет в ней электрический ток. А можно сказать, что этот ток вызывается напряженностью \vec{E} электрического поля, ускоряющего заряды проводника. Но ЭДС \mathcal{E} связана с напряженностью E соотношением

$$\mathcal{E} = E \cdot 2\pi r .$$

Собирая вместе все сказанное, запишем

$$E \cdot 2\pi r = - \frac{\Delta(\pi r^2 B_0 \cos \omega t)}{\Delta t} .$$

Более того, и рамка может быть не проводящей, а сделанной, например, из соломинки, через которую пьют сок, – все равно в ней возникнет индукционное электрическое поле. А значит, может и не быть никакой рамки: электрическое поле возникнет и в вакууме, и в воздухе, которым наполнен соленоид! – догадался Студент. Это поле будет равно

$$E = -\frac{r}{2} B_0 \frac{\Delta \cos \omega t}{\Delta t} = \frac{r B_0}{2} \omega \sin \omega t ,$$

причем оно тоже будет изменяться по гармоническому закону (конечно, тут Студент учел, что скорость изменения косинуса есть минус синус, умноженный на ω).

Но электрическое поле действует на электрический заряд. И тут у Студента возникла идея эксперимента: подвесить внутри соленоида заряженный шарик и измерить амплитуду его колебаний в электрическом поле \vec{E} , порожденном переменным магнитным полем \vec{B} .

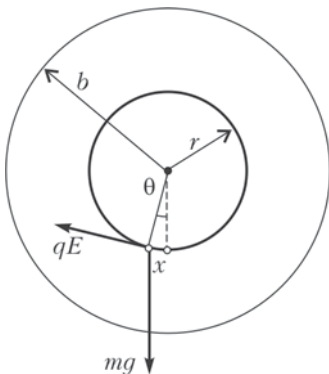


Рис. 2

Сказано – сделано. Масса шарика равнялась, конечно, m , его радиус был a , электрический заряд был равен q , а длину нити (разумеется, невесомой, нерастяжимой, бесконечно тонкой) Студент выбрал равной $r = b/2$, где b – это внутренний радиус соленоида (рис.2). Тогда уравнение движения шарика в электрическом поле E и в поле тяготения с ускорением g приобрело вид

$$x'' = -g \sin \theta + \frac{q}{m} E .$$

Угол отклонения θ этого математического маятника от положения равновесия легко связать со смещением x по окружности: $\theta = \frac{x}{b/2}$. Кроме того, если рассматривать малые колебания (как и положено здравомыслящему Студенту, а тем более школьнику Отличнику), то вместо синуса можно (приблизительно) написать его аргумент (конечно, в радианах): $\sin \theta = \theta = \frac{2x}{b}$. Тогда уравнение колебаний будет выглядеть так:

$$x'' + \frac{2g}{b}x = \frac{q}{m} \frac{b}{2} \frac{B_0}{2} \omega \sin \omega t.$$

Тут еще можно ввести привычное обозначение $\frac{2g}{b} = \omega_0^2$, где ω_0 – частота собственных колебаний шарика.

Ба! Ведь это просто уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора! – воскликнул Студент и немедленно отыскал его решение в виде $x = x_0 \sin \omega t$, т.е. тоже гармонических колебаний, причем с частотой вынуждающей силы. Скорость изменения синуса есть косинус, умноженный на ω , а скорость изменения косинуса, как уже было сказано, это минус синус, умноженный на ω . Значит, вместо ускорения x'' появится $-x_0 \omega^2 \sin \omega t$. В результате получится уравнение для определения амплитуды x_0 смещения шарика:

$$-x_0 \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 x_0 \sin \omega t = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t.$$

А поскольку это уравнение должно быть верно для любого момента времени, то $\sin \omega t$ можно сократить, и останется

$$x_0 = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Но что это? Получилось, что при значении $\omega = \omega_0$ знаменатель обращается в ноль, а значит, амплитуда отклонения шарика устремляется в бесконечность (рис.3; сплошные кривые). Да ведь это резонанс, а с резонансом надо обращаться осторожно. Нужно учесть силу, тормозящую движение шарика, – силу сопротивления воздуха.

И Студент стал изучать эту силу, роняя мелкие ша-

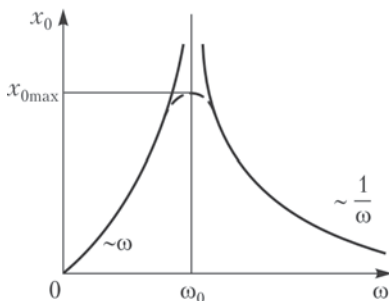


Рис. 3

рики из-под потолка в ванну. На таком большом расстоянии шарик быстро успевал приобрести постоянную скорость $v = \frac{h}{t}$, которую легко было вычислить, зная высоту потолка h и замерив секундомером время падения t , а момент падения даже для самых мелких пылинок был легко замечен на гладкой поверхности воды. В результате этих измерений Студент обнаружил, что сила сопротивления воздуха для мелких шариков пропорциональна их радиусу и скорости движения:

$$F_{\text{сопр}} = \gamma a v = \gamma a x' ,$$

где γ – коэффициент пропорциональности. (Интересно, что еще древний Аристотель указывал на такую зависимость силы от скорости, а в позапрошлом веке ее точно вычислил Стокс для случая медленного, «ползущего» движения сферы в сплошной среде.) Наш Студент получил значение $\gamma = \frac{10^{-3}}{3} \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{м/с}}$ для условий, близких к «нормальным».

В итоге пришлось исправить уравнение движения шарика с учетом найденной силы сопротивления, так что оно приобрело вид

$$x'' + \omega_0^2 x + \gamma \frac{a}{m} x' = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} \omega \sin \omega t ,$$

или, для краткости записи,

$$x'' + \omega_0^2 x + \beta x' = A \omega \sin \omega t ,$$

где

$$\beta = \gamma \frac{a}{m}, \quad A = \frac{q}{m} \frac{b B_0}{4} .$$

И тут кончается физика и начинается математика (которая, впрочем, тоже есть часть физики – как считают многие приличные люди). Теперь уже не годится искать решение в прежнем виде $x = x_0 \sin \omega t$, и ясно почему: тогда часть слагаемых в левой части по-прежнему будет пропорциональна $\sin \omega t$, а вот новое слагаемое, содержащее скорость смещения, будет пропорционально $\cos \omega t$, и уравнение нельзя будет сократить ни на $\sin \omega t$, ни на $\cos \omega t$. Поэтому попробуем искать решение в виде

$$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi) ,$$

где φ – так называемый сдвиг фаз (видно, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получим прежнее решение).

Подставив эту функцию в наше уравнение, получим

$$x_0 \left((-\omega^2 + \omega_0^2) \cos(\omega t - \varphi) - \beta \omega \sin(\omega t - \varphi) \right) = A \omega \sin \omega t .$$

Учтем следующие тригонометрические равенства:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi ,$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi .$$

Тогда в предыдущем уравнении выделятся две группы слагаемых: одна будет содержать $\cos \omega t$, другая $\sin \omega t$. А поскольку это уравнение должно быть верным в любой момент времени, то коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ должны быть равны нулю. Так получим два уравнения для неизвестных x_0 и φ :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \varphi + \beta \omega \sin \varphi = 0 ,$$

$$x_0 \left((-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \varphi - \beta \omega \cos \varphi \right) = A \omega .$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\beta \omega} , \quad x_0 = \frac{A \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta \omega)^2}} .$$

Видно, что теперь амплитуда отклонения шарика не обращается в бесконечность ни при каких значениях ω (см. рис.3; штриховая кривая). Но она достигает максимального значения при $\omega = \omega_0$, и это значение равно

$$x_{\max} = \frac{A}{\beta} = \frac{qbB_0}{4\gamma a} .$$

Теперь пора приступить к измерениям. Студент выбрал шарик радиусом $a = 1$ мм. Но какой наибольший заряд можно сообщить этому шарiku? Ясно, что такой, чтобы напряженность электрического поля у его поверхности не превышала предельного для воздуха значения $E_{\max} = 3 \cdot 10^6$ В/м. Отсюда находим

$$q_{\max} = 4\pi \epsilon_0 a^2 E_{\max} = \frac{10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} \text{ Кл} = \frac{10^{-9}}{3} \text{ Кл} .$$

Далее, внутренний радиус соленоида был равен $b = 0,1$ м, а наибольшая амплитуда отклонения шарика от положения равновесия (в резонансе) оказалась равной $x_{0\max} = 0,01$ мм, откуда уже легко получилось

$$B_0 = \frac{4\gamma a x_{0\max}}{b q_{\max}} = \frac{4 \cdot (10^{-3}/3) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}{0,1(10^{-9}/3)} \text{ Тл} = 0,4 \text{ Тл} .$$

Не мало, – подумал Студент. – Но неужели так же труден путь всех великих физиков?

МАГНИТНАЯ СИЛА И ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Е.Ромишевский, А.Стасенко

Лаплас присутствовал на первой публичной демонстрации опыта Ампера. Публика уже расходилась, и Лаплас у выхода стал ждать ассистента... хлопнул его по плечу и, пристально глядя на него, спросил: «А не вы ли это, молодой человек, подталкивали провод?»

М..Льоцци. История физики

К настоящему времени уже миллиарды людей воспользовались услугами электропоездов, автомобилей, автобусов, самолетов, кораблей, электростанций и т.п., в которых неустанно вращаются роторы электромоторов и генераторов тока. В основе работы этих старательных тружеников лежат фундаментальные законы электромагнетизма, открытые замечательными учеными девятнадцатого века. Вспомним вкратце лишь о тех из них, о которых пойдет речь в этой статье.

Андре Мари Ампер (1775–1836) открыл взаимодействие электрических токов и установил соответствующий закон, разработал теорию магнетизма (1820).

Майкл Фарадей (1791–1867) в 1821 году впервые осуществил вращение магнита вокруг проводника с током, а также, наоборот, проводника с током вокруг магнита, создав, таким образом, принципиальную модель электродвигателя. В этом несложном опыте была наглядно показана связь между электрическими и магнитными явлениями. Через десять лет он уже открыл явление электромагнитной индукции – возникновение тока в замкнутом проводнике при изменении магнитного потока через контур этого проводника.

Эмилий Христианович Ленд (1804–1865) в 1833 году установил правило определения направления индукционного тока (правило Ленца).

Кстати сказать, и Амнер, и Фарадей, и Ленц были членами Петербургской Академии наук.

Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) дал выражение для силы, действующей на движущийся заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца). Иностраный член Академии наук СССР.

Продemonстрируем «работу» законов, открытых этими физиками, в самом простом случае поступательного движения проводника в постоянном магнитном поле. Сила Лоренца «направляет» в разные стороны движущиеся электрические заряды разных знаков, а значит, создает в пространстве кулоновские электрические поля и в проводящей среде возбуждает электрические токи, т.е. является создателем источников электрических токов.

Рассмотрим такой пример. В однородном горизонтальном магнитном поле \vec{B}_z поступательно движется вертикальный длинный проводящий стержень длиной l с постоянной скоростью $\vec{v}_x \perp \vec{B}_z$ (рис.1). (Здесь индексы удобно указывают направления соответствующих векторов в декартовой системе координат $x y z$. Кружок с точкой означает, что ось z и магнитное поле направлены к нам.) Положительные ионы (к примеру, ионы меди Cu^+) закреплены в узлах кристаллической решетки, а свободные электроны, перемещаясь вверх под действием магнитной силы Лоренца $\vec{F}_L = e(\vec{v}_x \times \vec{B}_z)$, создают в объеме проводника од-

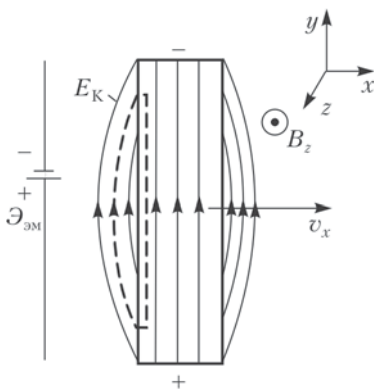


Рис. 1

нородное кулоновское электрическое поле $\vec{E}_K = (\vec{v}_x \times \vec{B}_z)$, уравновешивающее действие магнитной силы. (Заметим, что здесь учтен отрицательный заряд электрона, равный $-e$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – положительная фундаментальная константа.) В результате между концами стержня возникает постоянная разность потенциалов, равная $E_K l = v_x B_z l$. Таким образом, создается «электромагнитная батарейка» с электродвижущей силой $\mathcal{E}_{\text{эм}} = v_x B_z l$ и *сторонней* (т.е. не кулоновского происхождения) напряженностью.

А что это за изогнутые линии с боку от стержня? Они нарисованы для того, чтобы подчеркнуть существенное отличие

кулоновского поля от сторонних полей: работа по перенесению пробного заряда в кулоновском поле по замкнутому контуру (выделен пунктиром) равна нулю. Заметим, что электродвижущие силы (ЭДС) и связанные с ними сторонние напряженности в своей основе опять-таки имеют электромагнитный характер, но уже другого (тоже некулоновского) рода.

Теперь используем эту «электромагнитную батарейку» для получения электрического тока и электрической энергии. Для

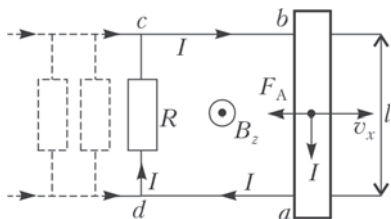


Рис. 2

этого будем двигать наш стержень вдоль двух параллельных горизонтальных проводников, находящихся на расстоянии l друг от друга (рис.2). Проводник замкнем на резистор сопротивлением R . При этом двигаться будет только стержень, а провод-

ники и резистор должны быть неподвижными. (Иначе в них тоже будет создаваться «электромагнитная батарея» той же силы, что и возникающая в стержне, но противоположно «направленная», так что тока в замкнутом контуре не будет.) Тогда в замкнутом контуре $abcd$ потечет электрический ток $I = \mathcal{E}_{эм}/R$ и на сопротивлении R будет выделяться тепловая мощность $I^2 R$.

За счет чего же выделяется тепловая энергия? Справедлив ли здесь закон сохранения энергии?

По движущемуся стержню сверху вниз течет электрический ток I . Значит, на проводник с током, находящийся в однородном магнитном поле \vec{B}_z , действует сила Ампера, направленная противоположно направлению движения стержня, т.е. вектору \vec{v}_x . Чтобы стержень сохранял постоянную скорость движения v_x , к нему необходимо приложить силу \vec{F}^* , равную по величине силе Ампера $F_A = IB_z l$, но направленную противоположно ей. При этом мощность этой силы ($N = F^* v_x = IB_z l v_x = I^2 R$) в точности равна тепловой мощности, выделяющейся на сопротивлении R , что, конечно же, неудивительно. Закон сохранения энергии верен!

Подключим теперь к параллельным проводам, по которым скользит стержень, еще один резистор сопротивлением R (см. рис.2). Тогда, если стержень по-прежнему будет двигаться со скоростью v_x , через него уже потечет электрический ток величиной $2I$. Сила Ампера увеличится в два раза, и в два раза больше станет выделяющаяся на сопротивлениях тепловая мощность.

Таким образом, мы получили электрический генератор постоянного тока. Включение нескольких параллельных сопротивлений R во столько же раз увеличит силу Ампера, тормозящую стержень.

Расположим теперь параллельные проводники вертикально (рис.3), и пусть по ним скользит наш проводящий (уже горизонтальный) стержень массой m , замыкающий цепь с резистором сопротивлением R и аккумуляторной батареей с электродвижущей силой \mathcal{E}_0 . Контур пронизывается прежним однородным горизонтальным магнитным полем \vec{B} , направленным к нам, и находится в поле тяготения Земли. (Индексы для векторов и их проекций для простоты опустим, так как мы уже разобрались, что куда направлено.) Если замкнуть ключ K и отпустить стержень, то по цепи потечет ток $I = \mathcal{E}_0/R$, направленный по часовой стрелке. Если величина \mathcal{E}_0 будет достаточно большой, то сила Ампера, действующая на стержень, будет больше силы тяжести mg , и стержень начнет двигаться вверх с начальным ускорением a , определяемым равенством

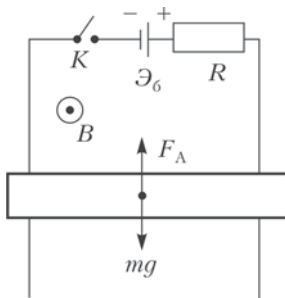


Рис. 3

$$ma = F_A - mg.$$

Если скорость стержня v , он превращается в «электромагнитную батарейку», имеющую электродвижущую силу $\mathcal{E}_{\text{эм}} = vBl$ и «действующую», по правилу Ленца, против вызывающей ее причины, т.е. против \mathcal{E}_0 . В конце концов может установиться стационарное состояние (отметим его индексом 0):

$$I_0 Bl = mg, \quad I_0 R = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{\text{эм}} = \mathcal{E}_0 - v_0 Bl, \quad (*)$$

откуда получим постоянную скорость движения стержня:

$$v_0 = \frac{\mathcal{E}_0 Bl - mgR}{(Bl)^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{Bl} \left(1 - \frac{mgR}{\mathcal{E}_0 Bl} \right).$$

Если первое равенство выражения $(*)$ умножить на v_0 , а второе – на I_0 , мы опять получим закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}_0 I_0 = \mathcal{E}_{\text{эм}} I_0 + I_0^2 R = mgv_0 + I_0^2 R.$$

Видно, что мощность аккумуляторной батареи расходуется на полезную мощность поднятия груза массой m со скоростью v_0 и на выделяющуюся при этом тепловую мощность. Таким образом,

на рисунке 3 фактически изображена принципиальная схема электрического мотора: ведь к нашему проводящему стержню вполне можно прикрепить, например, ведро воды, поднимаемое из колодца.

Итак, полезная (механическая) мощность нашего мотора равна

$$N_{\text{пол}} = \mathcal{E}_{\text{эм}} I_0 = \frac{\mathcal{E}_{\text{эм}} (\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_{\text{эм}})}{R},$$

следовательно, его коэффициент полезного действия равен

$$\text{КПД} = \frac{N_{\text{пол}}}{N_{\text{зат}}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эм}} I_0}{\mathcal{E}_6 I_0} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эм}}}{\mathcal{E}_6},$$

где $N_{\text{зат}}$ – полная мощность, затрачиваемая батареей. На рисунке 4 изображен график зависимости полезной мощности

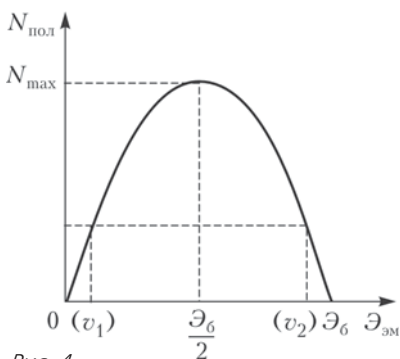


Рис. 4

от $\mathcal{E}_{\text{эм}}$, в нашем случае от $\mathcal{E}_{\text{эм}} = vBl$. Это – парабола. Легко видеть, что максимальная полезная мощность мотора N_{max} достигается, когда «электромагнитная» ЭДС $\mathcal{E}_{\text{эм}}$ оказывается вдвое меньше ЭДС включенной в цепь батареи \mathcal{E}_6 . При этом коэффициент полезного действия мотора составляет $\mathcal{E}_{\text{эм}}/\mathcal{E}_6 = 0,5$, т.е. 50%. Это значит, что если мы имеем электрический мотор, в цепи

которого содержится батарея с ЭДС \mathcal{E}_6 и сопротивлением R , и он поднимает груз массой m , то максимальную скорость поднятия этого груза можно найти так:

$$mgv_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{эм}} I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_6}{2} \frac{(\mathcal{E}_6 - \mathcal{E}_6/2)}{R} = \frac{\mathcal{E}_6^2}{4R}, \text{ и } v_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_6^2}{4mgR}.$$

По графику рисунка 4 видно, что одну и ту же полезную мощность с одним и тем же мотором можно получить, поднимая быстро ($v_2 > v_1$) легкий груз или медленно – тяжелый груз. Причем поднимать быстро легкий груз значительно выгоднее, потому что коэффициент полезного действия может быть значительно больше и мотор при этом будет греться существенно меньше. Максимально возможная скорость движения бесконечно легкого груза ($mg \rightarrow 0$) достигается, когда $\mathcal{E}_{\text{эм}} = v^*Bl = \mathcal{E}_6$,

при этом $I \rightarrow 0$ и КПД $\rightarrow 1$. Эту скорость $v^* = \mathcal{E}_6/(Bl)$ называют скоростью холостого хода мотора.

Вернемся снова к схеме «электромотора» (см. рис. 3). Эту схему очень просто превратить в схему «генератора», поменяв полюса батареи. Если в начальный момент замкнуть ключ и отпустить стержень, то вначале сила Ампера будет направлена вниз и стержень будет падать с ускорением, большим ускорения свободного падения:

$$Ma = mg + IBl.$$

Затем ток начнет уменьшаться, изменит свое направление, когда $\mathcal{E}_{\text{эм}} = vBl$ станет больше \mathcal{E}_6 , и в дальнейшем установится стационарное состояние:

$$v_{\text{уст}}Bl - \mathcal{E}_6 = I_{\text{уст}}R, \quad mg = I_{\text{уст}}Bl, \quad \text{и} \quad v_{\text{уст}} = \frac{\mathcal{E}_6}{Bl} \left(1 + \frac{mgR}{\mathcal{E}_6Bl} \right).$$

При этом за счет уменьшения потенциальной энергии стержня в поле тяжести начнет заряжаться батарея и, кроме того, будет выделяться тепловая мощность на сопротивлении. На языке мощностей запишем:

$$mgv_{\text{уст}} = v_{\text{уст}}BlI_{\text{уст}} = \mathcal{E}_6I_{\text{уст}} + I_{\text{уст}}^2R.$$

Рассмотренные примеры убедительно показывают, что такие важные для человечества физические объекты, как электрические генераторы и электрические моторы, являются как бы «родственными» по линии магнитных сил Лоренца и Ампера.

Обобщим теперь полученные результаты. Вернемся к нашему начальному примеру, изображенному на рисунке 2. Параллельные провода и перемычка с резистором сопротивлением R неподвижны. Стержень длиной l движется со скоростью v_x . В данный момент времени t координата стержня равна x . Магнитный поток $\Phi(t)$ через замкнутый контур $abcd$ равен произведению индукции поля B на площадь $lx(t)$ перпендикулярной полю площади:

$$\Phi(t) = Blx(t).$$

Заметим, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv_x.$$

Значит, можно записать, что

$$\mathcal{E}_{\text{эм}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Почему стоит знак «минус»? В нашем случае магнитный поток увеличивается, так как увеличивается площадь контура $abcd$, а ток в контуре будет течь против часовой стрелки и создавать внутри контура собственное магнитное поле, по направлению противоположное магнитному полю B . Это положение и называется правилом Ленца. Нашу электромагнитную электродвижущую силу $\mathcal{E}_{\text{эм}}$ назвали *электродвижущей силой электромагнитной индукции*, а установленный опытными фактами закон

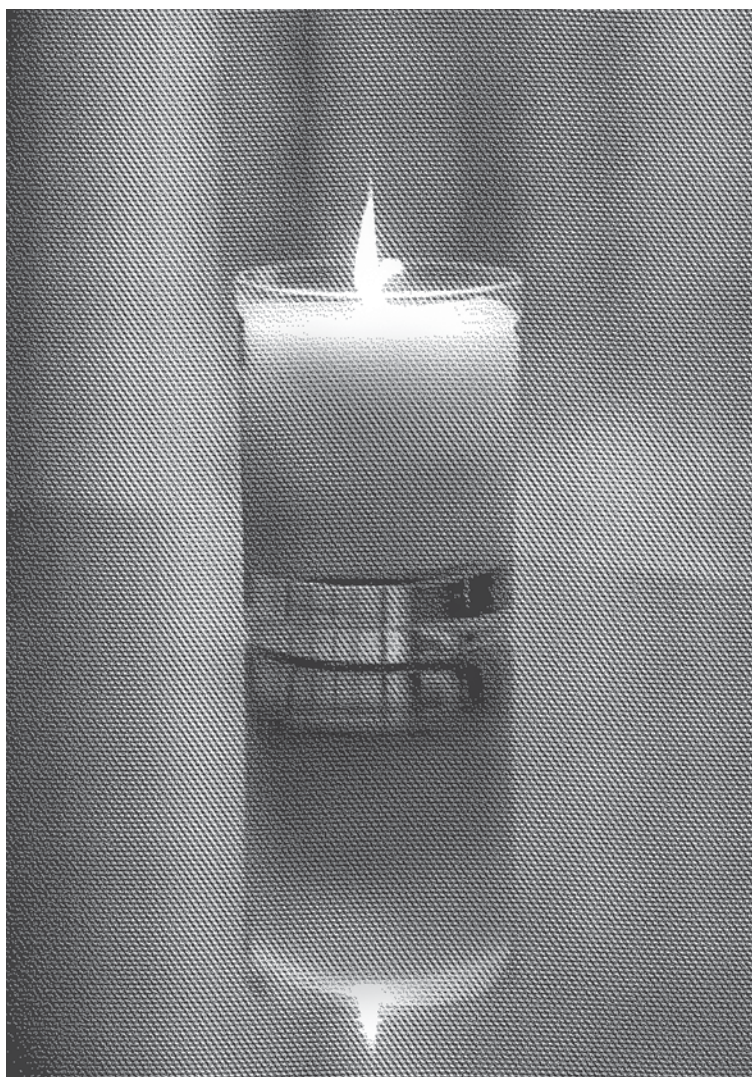
$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

— законом электромагнитной индукции Фарадея.

Дальнейшее обобщение закона (это опять-таки установлено опытными фактами) говорит о том, что если поток Φ магнитного поля \vec{B} через любую поверхность, опирающуюся на замкнутый контур, зависит от времени, то в этом контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции, определяемая законом Фарадея. Причем со временем могут изменяться (в отдельности или одновременно) форма контура, его площадь, ориентация в пространстве относительно магнитного поля \vec{B} , а также само магнитное поле $B(t)$, которое в общем случае должно складываться из внешнего магнитного поля и собственного магнитного поля, создаваемого возникающим собственным электрическим током в проводящем контуре.

Если вы запомните предыдущий абзац, то прослывете в школе большим знатоком физики. Чего вам и желаем.

ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА



УГОЛ ПАДЕНИЯ РАВЕН...

А.Стасенко

– Стоит лишь вынести нам под открытое
звездное небо
Полный водою сосуд, как сейчас же в нем
отразятся
Звезды небес и лучи засверкают
на глади зеркальной.
Лукреций. О природе вещей

Ну кто же не знает, чему равен угол падения, – конечно, углу отражения. А еще кое-что известно и о преломлении света. Вспомним построение лучей, которое предложил Христиан Гюйгенс – голландский физик, механик, математик и астроном.

Пусть на плоскую границу двух сред, например воздух–вода, падают параллельные лучи света под углом α (рис.1) и луч a достигает границы в момент времени $t = 0$ в точке A . Участок фронта падающей волны (плоскость, перпендикулярная лучам)

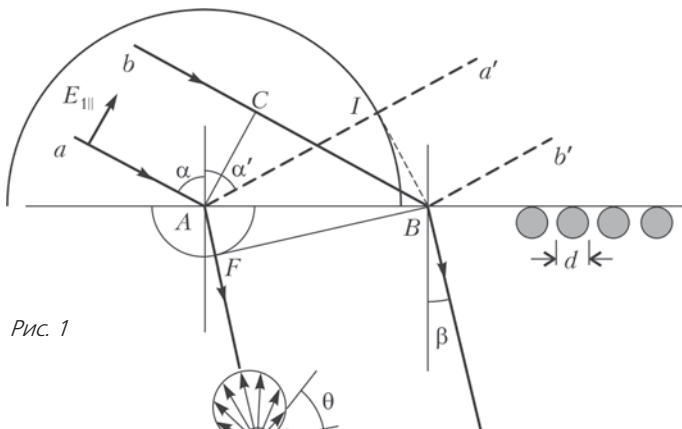


Рис. 1

Рис. 2

обозначим AC . Чтобы достигнуть поверхности раздела в точке B , луч b должен пройти путь CB за время $t = \frac{CB}{v_1}$, где v_1 – скорость света в первой среде...

И тут Гюйгенс ввел очень плодотворное понятие. Он предложил каждую точку поверхности раздела, до которой дошел падающий луч, т.е. первичная волна, считать источником сферической вторичной волны. Значит, пока луч b добирался до поверхности, точка A излучала вторичные волны – конечно, и в первую, и во вторую среду. Но скорости этой вторичной волны в двух средах различны – пусть, например, $v_1 > v_2$, как это имеет место в случае пары воздух–вода. А именно, за время t вторичная волна пройдет расстояние $AI = v_1 t$ в первой среде и $AF = v_2 t$ – во второй. Поэтому на рисунке 1 мы провели окружности разных диаметров, а через I и F обозначили точки касания фронтов отраженной и преломленной волн, которые (фронты) тоже перпендикулярны соответствующим лучам. Из равенства сторон треугольников ABC и ABI легко понять, что угол отражения α' равен углу падения α . А для определения угла преломления β напомним (учитывая, что $CB = AI$)

$$t = \frac{AI}{v_1} = \frac{AF}{v_2} = \frac{CB}{v_1} = \frac{AB \sin \alpha}{v_1} = \frac{AB \sin \beta}{v_2},$$

откуда следует известный закон преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Учитывая, что, по определению, коэффициент преломления среды обратно пропорционален скорости распространения света в этой среде, предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n,$$

где n – коэффициент преломления второй среды по отношению к первой.

Казалось бы, все ясно. Но задумаемся в смысл приведенных выше слов. Прежде всего – что это за точка A , которая умеет излучать вторичные волны? В физике точек не существует. Есть электроны, ядра, атомы, молекулы... Все эти частицы имеют конечные размеры. Например, диаметр молекулы воды d составляет несколько ангстрем ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$). Правда, средняя длина волны видимого нами света в тысячу раз больше: $\lambda \sim 0,5 \text{ мкм} = 5000 \text{ \AA}$. Поэтому в пределах одной молекулы электрическое и магнитное поля падающей (первичной) волны можно считать однородными, хотя, конечно, изменяющимися во

времени с колоссальной частотой

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \sim \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

С этой частотой электрическое поле вынуждает колебаться электронные облака молекул относительно ядер. Таким образом, каждая молекула превращается в элементарную антенну, которая и обязана излучать (вторичную) волну той же частоты, что и падающая. Но, как известно, линейно колеблющийся диполь ничего не излучает вдоль линии своих колебаний, так же, как и прямолинейная антенна не излучает вдоль своей осевой линии. По секрету скажем даже больше: плотность потока электромагнитной энергии от диполя или линейной антенны (диаграмма направленности) пропорциональна $\sin^2 \theta$, где θ – угол между направлением колебаний заряда (или тока) и линией наблюдения. На рисунке 2 изображена отдельная молекула-диполь и качественно показана диаграмма направленности ее излучения.

Теперь представим, что падающий свет линейно поляризован, а именно – его электрический вектор \vec{E}_{\parallel} лежит в плоскости падения. Значит, в этой же плоскости будет лежать и вектор $\vec{E}_{2\parallel}$ преломленной волны. И вот тут возникает интересный вопрос. Давайте подберем угол падения таким, чтобы направление отраженного луча было перпендикулярным преломленному лучу: $\pi - \alpha' - \beta = \frac{\pi}{2}$. Значит, при этом $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Подставив это значение угла преломления в закон преломления, получим

$$\frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \operatorname{tg} \alpha = n.$$

Этот особенный угол падения называется углом Брюстера.

Что же получается – если все молекулы второй среды, попавшие в область преломленного луча, колеблются в направлении $\alpha' = \alpha$, то никакого излучения в направлении отраженного луча быть не может? Вот вам и «угол падения равен углу отражения»! Вся энергия ушла во вторую среду.

Но как же в таком случае мы в действительности наблюдаем отраженные лучи? Дело в том, что падающий свет не обязательно поляризован в плоскости падения. Обычно в нем присутствуют и колебания вектора \vec{E}_{\perp} в перпендикулярной плоскости (так называемый хаотически, или естественно поляризованный свет). А эту составляющую молекулы второй среды переизлучают в направлении отраженного луча даже в случае угла Брюстера.

Кроме того, отражающие поверхности не обязательно все расположены под углом Брюстера по отношению к падающему свету (в случае рассеянного света это невозможно даже для одной плоскости).

Угол Брюстера очень интересен для экспериментатора. Действительно, если поляризованный в плоскости падения луч направить на плоскость диэлектрика и измерить угол падения, при котором исчезнет отраженный луч, то можно по формуле $\operatorname{tg} \alpha = n$ сразу определить коэффициент преломления среды. И сделать это можно, даже если диэлектрик непрозрачен и в нем невозможно наблюдать преломленный луч.

А как сделать этот падающий луч плоскополяризованным? Теперь ясно, как: нужно хаотически поляризованный луч предварительно отразить под углом Брюстера от пластинки из диэлектрика – при этом в отраженном луче останется только одно направление колебаний вектора $\vec{E}_{1\perp}$.

Итак, кто же отражает и преломляет лучи света? Во всяком случае ясно, что *не плоскость АВ* (см. рис.1). И не один только поверхностный слой молекул. Для того чтобы «понять», что пора преломиться, падающий луч должен «ощупать» вещество на глубину, по крайней мере, сравнимую с его длиной волны, т.е. охватить тысячи слоев молекул.

Теперь можно уточнить и определение «зеркальной» поверхности, упомянутой в эпитафье Лукреция: ее шероховатости должны быть много меньше длины волны λ_1 падающего излучения. (Отметим, что здесь идет речь о диэлектриках; в случае проводников, в которых имеются свободные электроны, процессы преломления и отражения имеют свои особенности.)

Наконец, что такое вообще параллельные падающие «лучи *a* и *b*»? Чтобы эти лучи были параллельны, должен падать достаточно широкий пучок света. Мы уже знаем, какой: его ширина должна быть много больше длины волны.

В результате всех рассуждений мы приходим к цепочке неравенств $AC \gg \lambda_1 \gg d$. На практике диаметр пучка в один миллиметр вполне удовлетворит этим неравенствам.

Однако, как далеко мы ушли от геометрической картинки рисунка 1: оказывается, не существует ни «плоскости» отражения, ни «лучей». Но не надо расстраиваться – геометрическая оптика все равно практически полезна, когда мы имеем дело с макроскопическими телами (окулярами, объективами, телескопами...), размеры которых много больше длины волны. А физическую оптику можно изучить, поступив в соответствующий институт или университет. Чего вам и желаем.

«ЗАГАДКА» ТЕНИ ОТ ПРОЗРАЧНОЙ ПЛАСТИНКИ

Я.Амстиславский

Оказывается, если в пучок белого света ввести тонкую прозрачную пластинку, то при соблюдении некоторых требований к положению пластинки и условиям ее освещения можно в проходящих лучах увидеть отчетливую узкую темную полосу тени от края пластинки.

В домашних условиях это явление можно наблюдать по схеме на рисунке 1. Здесь $\Pi\mathcal{C}$ – ориентированная вертикально ярко освещенная узкая щель, выполняющая роль вытянутого в линию

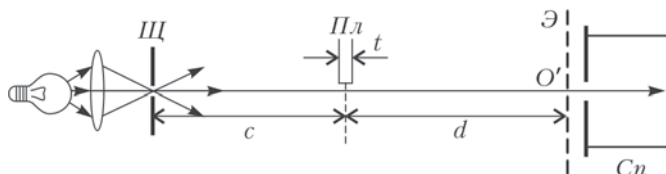


Рис. 1. Схема домашнего эксперимента

(линейного) источника света; $\Pi\mathcal{L}$ – пластинка из прозрачного материала, это может быть листок слюды, обертка от коробки сигарет, кусок отмытой от эмульсии фотопленки, покровное стекло или тонкий слой другого прозрачного материала; \mathcal{E} – экран в виде листа белой бумаги; точка O' – то место экрана, где наблюдается узкая полоска тени от края пластинки; Cn – спектроскоп.

Для выяснения природы наблюдаемого явления важно знать, попадает ли в область темной полоски какой-то свет и, если попадает, каков его спектральный состав. С этой целью можно использовать школьный спектроскоп. В ходе опыта экран убирают, а спектроскоп (или пластинку) осторожно смещают в поперечном направлении, добиваясь точного совмещения полоски тени со щелью спектроскопа. В этом случае при должной узкости щелей и при расположении щелей и края пластинки в одной плоскости в поле спектроскопа можно обнаружить достаточно яркий и контрастный спектр – совокупность чередующихся

светлых (окрашенных) и темных полос в непрерывном спектре (см. приведенные далее рисунки 3 и 4). Такой вид спектральной картины означает, что в область O' , с которой совмещена щель спектроскопа, попадает без заметного ослабления свет некоторых избранных длин волн, обозначим их λ_k , и совершенно не попадает свет промежуточных длин волн — λ'_k . И можно предположить, что наблюдаемое явление имеет интерференционное происхождение.

В спектральной картине наблюдается плавный переход освещенности от максимумов к минимумам, при этом минимумы освещенности оказываются совершенно темными, поэтому можно говорить о том, что интерферирующие пучки имеют одинаковые интенсивности. Вместе с тем, для формирования светлых полос в сплошном спектре с плавным переходом освещенности от максимумов к минимумам необходимо, чтобы изменение фазового сдвига $\Delta\varphi$ интерферирующих пучков с изменением длины волны λ также происходило монотонно. Но на пути световой волны, распространяющейся от источника света к области O' , нет никаких интерференционных устройств, кроме фазовой неоднородности в виде ступеньки различной оптической плотности на границе раздела двух прозрачных сред — воздуха и пластинки. Поэтому можно сказать, что интерферирующие пучки возникают в результате дифракции от этой фазовой неоднородности. За счет интерференции дифрагированных пучков и происходит максимальное усиление света в области длин волн $\lambda = \lambda_k$ и максимальное гашение в области промежуточных длин волн $\lambda = \lambda'_k$. Значит, узкая «темная» пограничная полоска тени от края тонкой прозрачной пластинки, наблюдаемая в плоскости экрана, в действительности оказывается темной не для всех длин волн, а только для избранных — для $\lambda = \lambda'_k$.

Для последующего рассмотрения развернем схему установки на 90° (рис.2), а дифракционный эффект в области тени от края пластинки представим как результат наложения двух когерентных дифрагированных пучков. Один из них возникает при дифракции первичного пучка от края непрозрачного экрана \mathcal{E}_1 , прикрывающего правую половину свободного фронта (см. рис.2,б); второй — при дифракции первичного пучка от края непрозрачного экрана \mathcal{E}_2 , прикрывающего левую половину свободного фронта, при условии что правая половина закрыта данной прозрачной пластиной $Пл$ (см. рис.2,в). Взаимная интерференция этих двух пучков и определит распределение амплитуд и фаз колебаний в картине дифракции от края прозрачной пластинки $Пл$ при ее расположении по схеме рисунка 2,а.

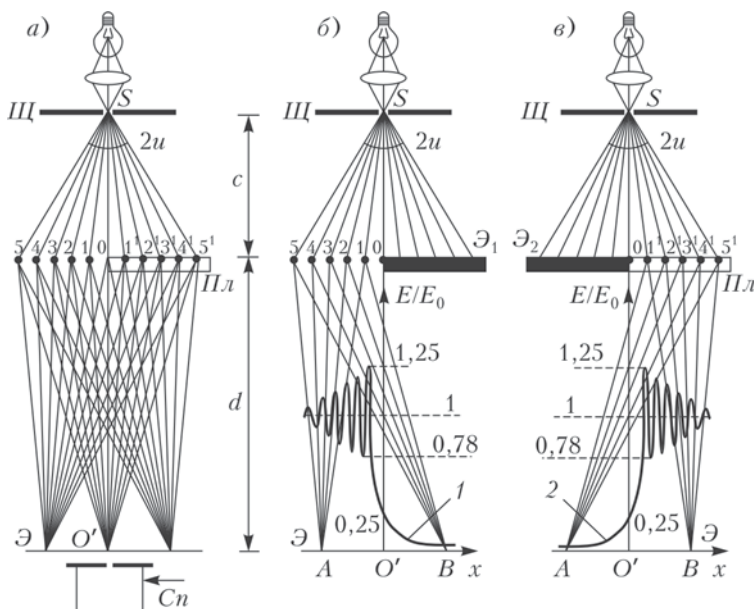


Рис. 2. Иллюстрация дифракционного эффекта от края пластинки

Начнем со схемы рисунка 2,б. В соответствии с принципом Гюйгенса будем считать, что точки 0, 1, 2, 3, 4, 5 первичной волны представляют собой элементарные вторичные излучатели. (Для того чтобы эти излучатели оказались когерентными, необходимо, чтобы ширина b источника света – щели Π – удовлетворяла условию когерентности $b \sin 2u < \frac{\lambda}{2}$, где $2u$ – угол когерентности. Уменьшая b , это условие всегда можно удовлетворить.) Начальные фазы излучателей оказываются различными – они возрастают от точки 0 к точке 5. Эти излучатели посылают вторичные волны во все стороны, в частности – в точку A освещенной области, в точку B области геометрической тени и в точку O' пограничной области. Фаза колебания, приходящего в данную точку наблюдения от каждого элементарного излучателя, зависит от его начальной фазы и набегающей фазы при распространении волны от излучателя до точки наблюдения. Таким образом, в каждую точку плоскости наблюдения приходит своя совокупность элементарных когерентных волн, различающихся по амплитудам и фазам. Их взаимная интерференция и определит результирующую амплитуду a и освещенность E , а

также фазу результирующего колебания в каждой точке плоскости наблюдения.

Расчет приводит к функции распределения освещенности $E = E(x)$, график которой показан на рисунке 2,б кривой 1. Точке O' соответствует граница геометрической тени. Левее этой точки формируется система близко расположенных светлых полос, имеющих большую освещенность при очень малой и убывающей по мере удаления от O' контрастности полос. Правее наблюдается резкое и монотонное убывание освещенности. В самой же пограничной точке O' имеем

$$a = \frac{1}{2} a_0 \text{ и } E = a^2 = \frac{1}{4} a_0^2 = \frac{1}{4} E_0 ,$$

где a_0 и E_0 – амплитуда и освещенность результирующей волны, приходящей в O' от свободного фронта.

Теперь перейдем к рисунку 2,в. Нетрудно видеть, что распределение освещенности в дифракционной картине в этом случае представляется кривой 2, полностью симметричной кривой 1. Единственное отличие состоит в том, что результирующие колебания в разных точках экрана наблюдения отличаются от предыдущего случая на величину $\Delta\phi(x)$, зависящую от толщины t прозрачной пластинки и от ее абсолютного показателя преломления n .

Вернемся, однако, к интересующему нас расположению (см. рис.2,а). От левой полуплоскости на экране Э формируется картина, распределение освещенности в которой дается кривой 1, а от правой полуплоскости – кривой 2. Поскольку обе полуплоскости прозрачны, то в каждой точке экрана будут перекрываться два результирующих колебания. Эти колебания имеют разные амплитуды и сдвиг фаз $\Delta\phi$, различный для разных точек экрана Э. Но нас не интересует общая картина интерференции, нам важно знать, что делается в области точки O' , где появляется узкая полоска тени. Можно сказать, что в O' перекрываются два колебания, для которых

$$a_1 = a_2 = \frac{a_0}{2} \text{ и } E_1 = E_2 = \frac{E_0}{4} .$$

Несущие эти колебания лучи проходят от точки S до точки O' одинаковые оптические пути повсюду, за исключением участка толщиной t : один из лучей проходит этот участок вблизи края пластинки *внутри пластинки* и набирает оптический путь tn , второй же луч проходит ту же толщину вблизи края пластинки, но в *воздухе*, и набирает оптический путь tn_0 , при этом между лучами набегает оптическая разность хода $\Delta = t(n - n_0) = t(n - 1)$,

где $n_0 = 1$ – показатель преломления воздуха. Связь между разностью хода лучей Δ и сдвигом фаз колебаний $\Delta\varphi$ определяется известным соотношением $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$. Поэтому в нашем случае можно записать

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{t(n-1)}{\lambda}.$$

Видно, что с изменением длины волны λ величина $\Delta\varphi$ изменяется и периодически удовлетворяет условию максимального усиления $\Delta\varphi = 2k\pi$, где k – целое число. Следовательно, получим условие максимального усиления в виде

$$t(n-1) = k\lambda_k,$$

где λ_k – те длины волн, которые максимально усиливаются в точке O' . Максимальное гашение будут испытывать промежуточные длины волн λ'_k , для которых выполняется соотношение $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, поэтому условие максимального гашения запишем в виде

$$t(n-1) = (2k+1) \frac{\lambda'_k}{2}.$$

Из проведенного анализа следует, что при освещении пластинки светом с длинами волн $\lambda = \lambda_k$ в пограничной области O' происходит интерференция двух колебаний, для которых $a_1 = a_2 = \frac{a_0}{2}$ при $\Delta\varphi = 2k\pi$. В этом случае для результирующего колебания имеем

$$a = a_1 + a_2 = a_0 \text{ и } E = 4E_1 = E_0.$$

Следовательно, в световом пучке, содержащем набор длин волн λ_k , тень от края пластинки возникать не должна, а пограничная область O' при наличии пластинки должна быть освещена так же, как это было бы в ее отсутствие. При освещении же пластики световым пучком, содержащим промежуточные длины волн λ'_k , имеем по-прежнему $a_1 = a_2 = \frac{a_0}{2}$, но $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$. Поэтому

$$a = a_1 - a_2 = 0 \text{ и } E = a^2 = 0.$$

Значит, тень от края пластинки должна в этом случае возникать, быть резко выраженной и отличаться большой контрастностью.

Залогом получения высококачественной спектральной картины является выполнение следующих требований: край прозрачной пластинки должен быть прямым и ровным (без зазубрин и изгибов); сама пластинка вблизи края должна быть однородной по толщине и оптической плотности; щель III и щель спектроско-

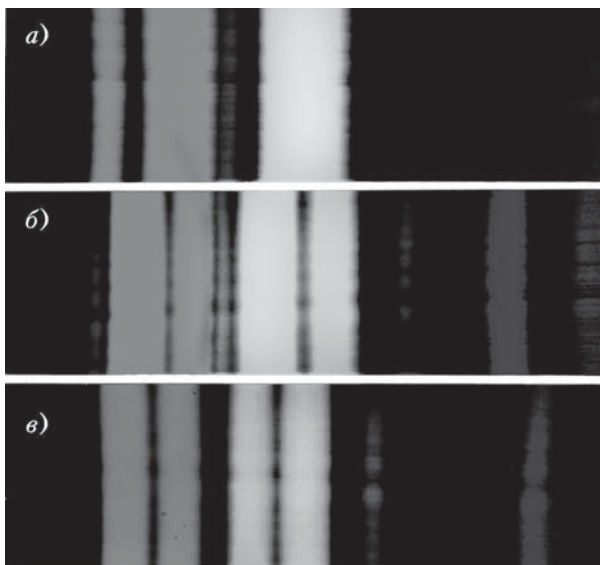


Рис. 3. а) Слюда, $t = 9$ мкм; б) слюда, $t = 16$ мкм; в) обертка от пачки сигарет, $t = 19$ мкм

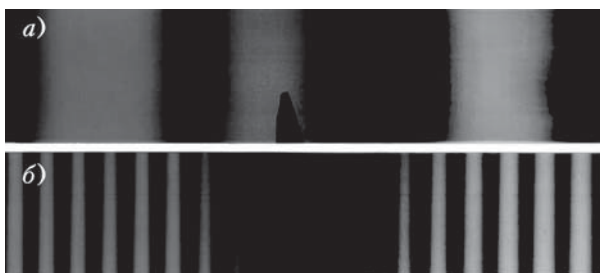


Рис. 4. а) Слюда, $t = 22$ мкм; б) покровное стекло, $t = 138$ мкм

па должны быть достаточно узкими; обе щели и край пластинки должны быть расположены в одной плоскости.

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют наблюдаемые в опыте закономерности. Спектральные картины сфотографированы при помощи микрофотонасадки МФН-3. Расстояния s и d в опытах с пластинками из разных прозрачных сред были одинаковы и составляли приблизительно 20 см. Снимок 3 получен при работе со школьным спектроскопом, а снимок 4 – с универсальным монохроматором.

РАЗГЛЯДЫВАЯ ШАРИКОВУЮ РУЧКУ

А.Стасенко

Однажды, внимательно слушая лекцию по оптике и разглядывая свою шариковую ручку с шестигранным прозрачным корпусом, Студент заметил, что стержень с пастой меняет свой видимый диаметр в зависимости от угла поворота. «Э, брат, – подумал Студент, – тут все дело в преломлении лучей». Но, как сказал Лектор, еще во втором веке Клавдий Птолемей описал явление преломления света в трактате «Оптика», а его последователи даже предложили связь между углами падения α и преломления β в виде $\frac{\alpha}{\beta} = n$, где n – постоянная величина, называемая коэффициентом преломления. Это верно, конечно, только для малых углов, а для любых углов неверно. Потому что правильный закон преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ лишь в семнадцатом веке изложил в своих лекциях (в Лейдене) Виллеброрд Снеллиус.

Но что же ручка? «Нельзя ли, – подумал Студент, – узнать коэффициент преломления пластмассы, из которой сделан ее корпус?» И приступил к делу.

Разобрав ручку, он прежде всего измерил геометрические размеры – радиус стержня r , внутренний радиус корпуса R , расстояние между внешними параллельными гранями b (рис.1), – благо под руками была тетрадь в клетку, правда не самый точный инструмент.

Были отмечены два интересных результата наблюдения: вдоль линии $A1O$ (перпендикулярно грани) стержень казался тоньше реального размера ($r' < r$), а вдоль линии BCO (луч проходит через диаметрально противоположные ребра) – казался самым толстым.

Начнем с первого случая. Так как наблюдение ведется с расстояния порядка 300 мм, то самый большой (внешний) поперечный размер ручки $b \sim 8$ мм мал по сравнению с этим расстоянием, не говоря уж о диаметрах внутренних цилиндров.

Прежде всего, угол α известен из измерений: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r'}{BO}$. По-прежнему известны катет 35: $35 = \sqrt{R^2 - r^2}$ (поскольку он есть касательная к стержню в точке 5) и угол δ : $\sin \delta = \frac{r}{R}$. Следовательно, для отрезка 12, или ординаты y_2 точки 2, получим $y_2 = (BO - x_1) \operatorname{tg} \alpha$, где x_1 – абсцисса точки 2. С другой стороны, этот же отрезок есть и катет прямоугольного треугольника $C12$: $y_2 = (R - x_1) \operatorname{tg} 60^\circ$ (R – радиус окружности, описанной вокруг шестигранного сечения). Значит, можно найти и абсциссу:

138

и окончательно ординату:

$$y_2 = \sqrt{3} \frac{r' - R \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Таким образом, координаты точки 2 (y_2 и $x_2 = x_1$) известны. Для этой точки запишем закон преломления Снеллиуса, связав между собой пока что неизвестные угол преломления β и коэффициент преломления n :

$$n = \frac{\sin \psi}{\sin \beta} = \frac{\sin (30^\circ + \alpha)}{\sin \beta}.$$

То же можно сделать и для точки 3:

$$n = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{r}{R \sin \gamma},$$

но тут известен угол δ , что и учтено. Ордината этой точки есть $y_3 = R \operatorname{tg} \epsilon$, где угол ϵ пока что неизвестен.

Но как найти координаты точки 3? Очень просто: написать уравнения прямой 23 и окружности радиусом R и учесть, что точка 3 принадлежит им обеим. Прямая 23 наклонена к оси x под углом $30^\circ - \beta$ и проходит через известную точку 2. Значит, ее уравнение имеет вид

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \operatorname{tg} (30^\circ - \beta).$$

А уравнение окружности совсем простое с виду:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Решая эти два уравнения, выразим x_3 и y_3 через угол β . «Ох, – пробормотал Студент, – сплошная геометрия!»

«Но и геометрия – часть физики!» – заявил Сосед, давно наблюдавший за приятелем, и тут зазвонил звонок на перемену. Так что они решили найти n перед сном, а заодно построить зависимость наблюдаемого радиуса r' от угла поворота ручки – ведь дома у них был компьютер.

ФОКУС ШАРА

В.Дроздов

*И даль свободного романа
Я сквозь магический кристалл
Еще не ясно различал.*

А.С.Пушкин

Однажды у меня в руках оказался оптический раритет – хрустальный шар диаметром 5,5 сантиметров, изготовленный предположительно в Великобритании. Предпоследний владелец использовал этот магический кристалл в конце XIX – начале XX века (точный год изготовления изделия неизвестен). Сквозь толщу лет пробиваются староанглийские слова, переведенные на русский язык:

«...Наблюдатель должен сесть спиной к свету, держа шар на ладони руки, которая может удобно покоиться на коленях, или шар можно поместить на столе на подставке под ним и поставить сзади экран из черного бархата или темного материала. Последний физически помогает отключить боковой свет и отражение.

Постоянное «глядение» в полной тишине абсолютно необходимо, так как в отличие от других оккультных явлений отвлечение внимания или первичного (обычного) сознания очень неблагоприятно.

Успех обнаруживается, когда сфера, прекращая отражать, становится молочной. Появляется туманный цвет (обычно красный и его дополнительный – зеленый), превращаясь в темноту, которая откатывается прочь, подобно занавесу, который открывает взгляду наблюдателя картины, сцены, фигуры в движении, интересные сентенции и т.д.

Оживление скрытой памяти или воспоминаний о будущем является одной из главных особенностей этого опыта».

Признаюсь, что у меня не получилось разглядеть в шаре что-либо необычное. Видимо, я отношусь к тем 25% людей, которые «ничего не смогут сделать вообще», как говорится в обращении

к читателю (покупателю шара). Из этого, конечно, не следует, что ни у кого не получится, хотя инструкция, с современной точки зрения, и выглядит весьма фантастично. С другой стороны, магические кристаллы выпускались в XIX веке явно не единичными экземплярами. И если бы в них ничего и никому нельзя было увидеть, то кто бы их стал приобретать? В любом случае, последнее слово будет за достаточно массовым экспериментом...

В солнечную погоду легко экспериментально убедиться в том, что шар фокусирует солнечные лучи, действуя как собирающая линза. Данный шар собирает лучи на расстоянии 5 мм от его поверхности.

Интересно, что маленькие капельки воды на листьях растений имеют почти сферическую форму (из-за значительного преобладания сил поверхностного натяжения над силами тяжести). Такие капельки, фокусируя солнечные лучи на листьях, точно обжигают их. Вот почему, например, растения не надо поливать в то время, когда они освещены солнцем.

Рассчитаем теперь теоретически фокусное расстояние шара $F = OC$ (рис.1). Рассмотрим луч, идущий вблизи одной из

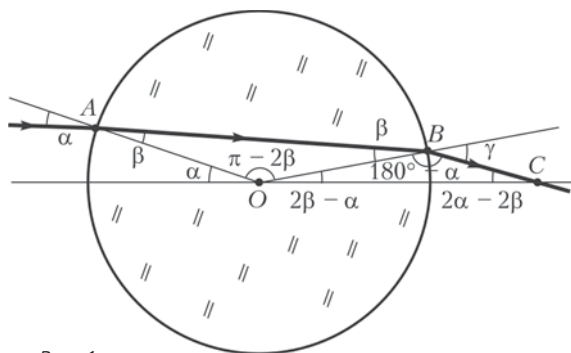


Рис. 1

главных оптических осей шара параллельно ей. Место пересечения вышедшего из шара луча и оси – точки C – и есть фокус «толстой» линзы, т.е. нашего шара. Параксиальность лучей гарантирует нам, что углы α, β, γ будут малыми, т.е. значительно меньшими одного радиана. По закону преломления света, в точках A и B имеем соответственно

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad n \sin \beta = \sin \gamma,$$

где n – показатель преломления материала шара. Отсюда

получаем $\gamma = \alpha$. Применим к треугольнику OBC теорему синусов:

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin(2\alpha - 2\beta)},$$

откуда получим

$$F = \frac{R \sin \alpha}{\sin(2\alpha - 2\beta)},$$

где R – радиус шара. Так как синус малого (в радианной мере) угла можно (и нужно) заменить самим углом, то окончательно имеем

$$F = \frac{R\alpha}{2(\alpha - \beta)} = \frac{Rn}{2(n-1)}. \quad (1)$$

Факт отсутствия здесь величины β говорит о том, что все параксиальные лучи собираются в одной точке C , т.е. мы нашли действительно фокус.

Полученная формула дает возможность, используя предыдущие измерения, узнать показатель преломления стекла, из которого изготовлен шар:

$$n = \frac{2F}{2F - R} = \frac{4F}{4F - d} = \frac{4 \cdot 3,25}{4 \cdot 3,25 - 5,5} = 1,73.$$

Видим, что магический кристалл сделан из качественного оптически плотного стекла.

Из формулы (1) для фокусного расстояния легко вывести что

$$\text{при } 1 < n < 2 \quad F > R,$$

$$\text{при } n = 2 \quad F = R,$$

$$\text{при } n > 2 \quad F < R.$$

Ясно, что рисунок 1 и выведенная на его основе формула справедливы при $1 < n < 2$. А для $n > 2$ придется сделать другой рисунок (рис. 2) и получить другую формулу фокуса шара. Вычисления весьма похожи на первый случай, поэтому будем кратки: применим теорему синусов к треугольнику AOC и запишем закон преломления света в точке A . Синусы малых углов сразу заменим самими углами. Тогда из уравнений

$$\frac{F}{\beta} = \frac{R}{\alpha - \beta} \quad \text{и} \quad \alpha = n\beta$$

сразу находим

$$F = \frac{R}{n-1}. \quad (2)$$

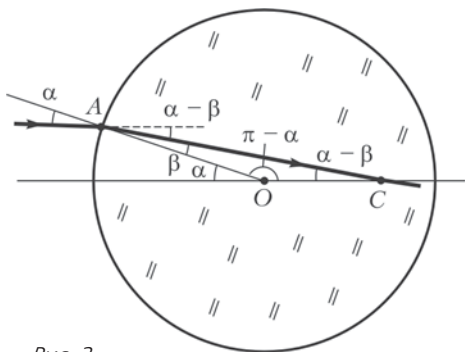


Рис. 2

Отметим, что для $n = 2$ подходят обе формулы фокусного расстояния шара – (1) и (2). А бывает ли показатель преломления стекла больше двух? Обычно в задачах встречаются числа, меньшие двух, но в «Справочнике по физике» А.С.Еноховича, например, указан диапазон показателей преломления оптического стекла от 1,47 до 2,04. Можно надеяться, что при неизбежном совершенствовании техники и технологии изготовления оптического стекла удастся получить образцы и с большими показателями преломления.

В заключение сравним «толстую» и «тонкую» линзы. Если для шара мы получили две разные формулы фокусного расстояния: одну для $n \leq 2$, другую для $n \geq 2$, то для тонкой линзы такая формула, как известно, одна:

$$F = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)},$$

где R_1 и R_2 – радиусы сферических поверхностей, ограничивающих тонкую линзу. В частности, при $R_1 = R_2 = R$

$$F = \frac{R}{2(n-1)}. \quad (3)$$

Видно, что формула (3) отличается и от формулы (1), и от формулы (2).

РАЗМЕРНОСТИ И... ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ БОРА

Г.Бакунин

Ни для кого не секрет, что не любую концепцию современной физики можно корректно объяснить в школьных терминах. Иногда ситуация складывается еще сложнее – вычисления носят элементарный характер, однако понять мотивацию классиков совсем непросто. Так, например, обстоит дело с формулой Бора для квантования энергетических уровней в атоме водорода. Эта формула безусловно достойна того, чтобы обратить на нее внимание, поскольку позволяет установить связь между законами классической механики и квантовыми идеями. Более того, она является прекрасным примером того, как нетривиальный экспериментальный результат наглядно объясняется с помощью теории.

Еще в 1885 году швейцарский учитель физики Иоганн Бальмер установил, что частоты (или длины волн) всех спектральных линий водорода в области видимого света (серия Бальмера) можно описать одной довольно простой формулой. Несколько позже в спектре водорода были обнаружены серии линий в области ультрафиолета (серия Лаймана) и в области инфракрасного излучения (серия Пашена и др. серии), описываемые аналогичными формулами. Оказалось, что для всех этих линий пригодна общая формула, называемая теперь формулой Бальмера–Ридберга:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

где λ – длина волны излучения, $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга, а n_l и n_k – целые числа. Эта формула являлась в то время научной загадкой.

Включить в теоретическую модель квантовые (целые) числа, опираясь на «планетарную» модель Резерфорда, удалось Нильсу Бору в 1913 году. С формальной точки зрения, новые квантовые вычисления просты, так как в них используются

только алгебраические преобразования базовых законов. Однако все не так просто с квантованием момента импульса, использованным Бором для объяснения формулы Бальмера–Ридберга. Выбор этой физической величины для квантования далеко не тривиален. Более того, момент импульса не изучают в школе (разве что факультативно), и во многом это создает методические трудности. Здесь мы рассмотрим, как гипотезу Бора можно обосновать с размерностной точки зрения, которая является полезной и при решении других задач.

Начнем с введения основных величин. Энергию излучаемых фотонов можно рассматривать как результат перехода электрона с одного энергетического уровня на другой:

$$\epsilon_{\Phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_l} - E_{n_k},$$

где h – постоянная Планка, ν – частота излучения, c – скорость света, а E_n – энергия n -го уровня. В нашем случае энергия E электрона, движущегося по круговой орбите, складывается из кинетической энергии, равной $\frac{mv^2}{2}$, и потенциальной энергии притяжения электрона к ядру, равной $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины: скорость электрона v и радиус орбиты r . Одну из них можно исключить при помощи уравнения движения электрона по орбите

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Тогда получаем

$$E(r) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Сравним разность энергий электрона на орбитах с радиусами r_l и r_k :

$$E_l - E_k = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_k} \right)$$

с энергией фотона, записанной с помощью формулы Бальмера–Ридберга:

$$\epsilon_{\Phi} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right).$$

Видим, что необходимо введение новой гипотезы для того, чтобы

установить связь квантовых чисел n_l и n_k с соответствующими радиусами орбит r_l и r_k .

Гипотеза, предложенная Бором в 1913 году, заключается в квантовании момента импульса вращающегося по круговой орбите электрона:

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}.$$

Исторической справедливости ради, отметим, что и до Бора предпринимались попытки квантования физических величин, связанных с орбитальным движением. Тем не менее, гениальная интуиция Бора сыграла решающую роль.

Рассмотрим вопрос с размерностной точки зрения, не выбирая заранее, какую величину нужно квантовать. Запишем более общее условие квантования в виде

$$v^\alpha r^\beta = n C_0,$$

где α, β, C_0 – некоторые постоянные. Заметим, что случай $\alpha = 2$ и $\beta = 0$ ведет к квантованию энергии, выбор $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ характеризует импульс, а комбинация $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ соответствует моменту импульса.

Итак, мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными v, r, n и тремя постоянными α, β, C_0 :

$$\begin{aligned} E(r) &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ v^\alpha r^\beta &= n C_0. \end{aligned}$$

Исключая переменные v и r , найдем зависимость энергии электрона $E(r(n)) = E_n$ от квантового числа n :

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m (C_0 n)^\frac{2}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2\beta-\alpha}} \sim \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{2\beta-\alpha}}.$$

Для получения зависимости $E_n \sim \frac{1}{n^2}$ необходимо предположить, что

$$2\beta - \alpha = 1, \text{ или } \beta(\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Очевидно, в рамках размерностного подхода мы ожидаем уви-

деть целые значения α и β , что обеспечивается нечетными значениями числа α , а именно $\alpha = 1, 3, 5, \dots$. Однако выбор $\alpha = \beta = 1$ можно интерпретировать в терминах сохранения момента импульса электрона. Это важный аргумент, поскольку сохранение момента импульса орбитального движения в поле ньютоновских или кулоновских сил является основой описания некруговых траекторий. Сам Бор затронул этот вопрос только косвенно, указав на возможность сопоставления круговой и эллиптической орбит электрона с заданной энергией посредством выбора радиуса круговой орбиты. С другой стороны, момент импульса имеет размерность постоянной Планка h :

$$rp = rmv = C_* n,$$

где $C_* = mC_0 = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная, которая соответствует уравнению, описывающему гипотезу Бора.

Естественно, универсальная постоянная h должна участвовать в уравнении, описывающем излучение в соответствии с фундаментальными идеями Планка. Важно, что во времена Планка и Бора постоянная h все еще оставалась магической величиной, требующей интерпретации, и модель квантования Бора стала еще одним шагом в этом направлении.

МОЖНО ЛИ В МИКРОСКОП МОЛЕКУЛУ РАЗГЛЯДЕТЬ?

А.Стасенко

А почему вообще что-то можно разглядывать в микроскоп?

Вспомним, прежде всего, как строится изображение рассматриваемого предмета в рамках геометрической оптики. Простейшая схема микроскопа имеет две собирающие линзы. Та, что повернута к объекту, называется объективом. Пусть этот объект расположен вблизи фокуса объектива $F_{об}$ на расстоянии, чуть большем фокусного расстояния (рис.1,*а*). По правилам построения изображения в линзе проведем из точки A объекта два луча

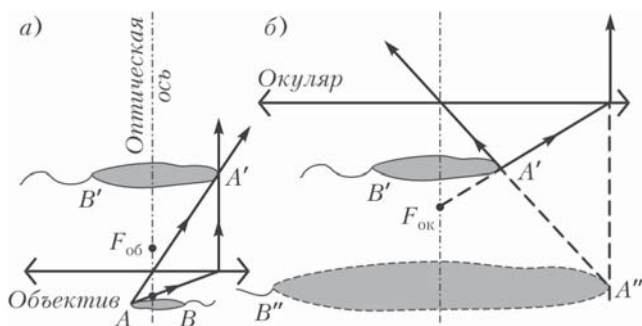


Рис. 1

— один через фокус, другой — через центр объектива. Первый луч, согласно определению фокуса, после преломления в линзе должен пойти параллельно оптической оси, а второй вообще не изменит направления. С другой стороны объектива они пересекутся в точке A' , которая и является действительным изображением точки A . Точно так же построим изображение точки B и вообще всех точек объекта, лежащего на предметном столике. И чем ближе предмет будет расположен к фокусу объектива, тем большим получится его действительное перевернутое изображение $A'B'$.

Теперь используем вторую линзу – окуляр, расположив его так, чтобы его фокус $F_{\text{ок}}$ был вблизи первого изображения $A'B'$, но со стороны объектива (рис.1,б). Изображение A'' точки A' тоже построим при помощи двух лучей. Однако теперь это будет мнимое изображение, находящееся на пересечении продолжений этих лучей с той же стороны окуляра, что и $A'B'$.

Итак, мы получили окончательное увеличенное мнимое перевернутое (обратное) изображение $A''B''$ рассматриваемого объекта AB . Уменьшая расстояния между AB и точкой $F_{\text{об}}$ (фокусом объектива) и между $A'B'$ и $F_{\text{ок}}$ (фокусом окуляра), можно убедиться в возможности неограниченного увеличения микроскопа. Но это только в рамках геометрической оптики!

Микроскописты XIX века ужасно обиделись, когда им объяснили, что существует предел *разрешающей способности* их приборов (т.е. возможности различить две точки A и B как отдельные) и что этот предел связан с длиной волны света. Соответствующие оценки сделал в 1872 году немецкий физик-оптик Аббе, который сам изготавливал эти приборы и довел их до совершенства. Проследим ход его мыслей.

Пусть на «предмет» AB снизу падает плоская волна, одновременно достигающая точек A и B (рис.2,а). Согласно принципу Гюйгенса, они обе становятся источниками вторичных сферических волн. Посмотрим, как эти волны распространяются вдоль некоторого направления, образующего угол θ с оптической осью. Построим отрезок BC , перпендикулярный этому направлению и касательный к сферическим поверхностям волн, выходящих из A и B . Но вышли-то они не одновременно: чтобы достичь точки C , волна из точки A должна выйти раньше. Соответствующий отрезок времени равен $t' = AC/c$, где c – скорость волны. Следовательно, если возмущение, идущее из точки B , записать в виде

$$s_B = \sin \omega t ,$$

то возмущение от точки A запишется в виде

$$s_A = \sin \omega(t + t') = \sin \omega \left(t + \frac{\Delta}{c} \right) = \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right).$$

Здесь $AC = \Delta$ – разность хода волн, $\lambda = cT$ – длина волны, или расстояние, проходимое волной за период $T = 2\pi/\omega$. Из треугольника ABC легко найти эту разность хода:

$$\Delta = AB \sin \theta = d \sin \theta .$$

Понятно, что эта разность хода будет сохраняться и при дальней-

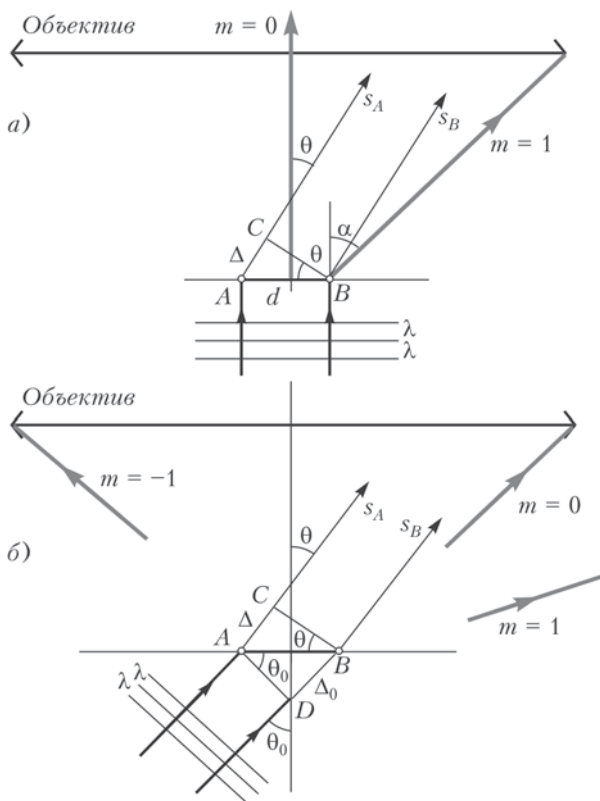


Рис. 2

шем распространении волн s_A и s_B . И где-то далеко-далеко фронты эти волн станут плоскими, а суммарное возмущение станет равным

$$s_{\Sigma} = \sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right).$$

А что значит *далеко*? Ведь если мы собираемся рассмотреть отрезок $AB = d$ как отрезок (т.е. различить точки A и B) порядка микрометра и меньше, то даже один миллиметр (порядок фокусного расстояния объектива) – это уже очень далеко ($F_{об}/d \gg 1$).

Итак, найдем сумму двух волн:

$$s_{\Sigma} = \sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi\Delta}{\lambda} \right) \sin \left(\omega t + \frac{\pi\Delta}{\lambda} \right).$$

Множитель перед синусом определяет амплитуду суммарного колебания – результат интерференции двух волн на бесконечности (или в параллельных лучах). Видно, что квадрат амплитуды, т.е. интенсивность, максимален при условии

$$\frac{\pi \Delta}{\lambda} = m\pi, \text{ где } m - \text{целое число,}$$

или при условии

$$\Delta = m\lambda = d \sin \theta_{\max}^{(m)}.$$

Таким образом, определены направления, в которых две волны усиливают друг друга, или имеет место положительная интерференция. И вот тут можно пояснить гениально простую мысль Аббе: для того чтобы информация о расстоянии d между точками A и B была воспринята наблюдателем, нужно, чтобы, по крайней мере, первый максимум ($m = 1$) интерференционной картины попал в объектив микроскопа. Вот это условие:

$$\theta_{\max}^{(1)} \leq \alpha,$$

где α – угол, под которым виден радиус объектива микроскопа из центральной точки предметного столика (см. рис.2,*а*). Положив в предыдущем выражении порядок интерференции $m = 1$, получим искомое наименьшее расстояние между двумя точками, различными как отдельные точки:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

Отсюда видно, что желательно уменьшать λ и увеличивать α . Но наименьшая длина волны видимого (фиолетового) света $\lambda \sim 0,4$ мкм, а синус нельзя сделать больше единицы – вот почему объект располагают как можно ближе к объективу, а фокусное расстояние последнего берут как можно меньшим.

Но, пойдем дальше. Почему непременно нужно освещать наши «точки» вдоль оптической оси? Попробуем направить свет под углом θ_0 к ней (рис.2,*б*). Тогда разность хода волн s_A и s_B составит

$$\Delta - \Delta_0 = AC - DB = d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda.$$

Видно, что максимум нулевого порядка ($m = 0$) пойдет в направлении θ_0 . Потребуем теперь, чтобы он попал на правый край объектива ($\theta_0 = \alpha$), а максимум минус первого порядка ($m = -1$) – на левый край ($\theta_{-1} = -\alpha$). В результате получим

$$d(\sin(-\alpha) - \sin \alpha) = -1 \cdot \lambda,$$

откуда

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

Видно, что удалось вдвое уменьшить предельно разрешимое расстояние между двумя точками.

И это ее не все. Поместим между объективом и предметным столиком жидкость с коэффициентом преломления n . Скорость света в ней в n раз меньше, чем в вакууме (или, что почти одно и то же, в воздухе); значит, длина волны тоже уменьшится в n раз. В таком случае

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha},$$

где λ — длина волны в воздухе. Это — так называемая *иммерсионная* техника (от латинского *immersio* — погружение).

Но коэффициенты преломления жидкостей не намного превышают единицу: например, для бензола $n \approx 1,5$, для бромоформа $n \approx 1,6$. Так что правы те, кто говорят, что микроскоп не может разрешить расстояния, существенно меньшие половины длины волны.

А вот тут начинается то, чего не знал сам Аббе. В 1924 году французский физик Луи де Бройль развил идею о том, что материальной частице с импульсом mv можно сопоставить волну с длиной

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Например, если ускорить электрон в электрическом поле с разностью потенциалов U , то он приобретет скорость

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}},$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг — его масса. Значит, длина волны электрона, согласно де Бройлю, будет равна

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e U e}}.$$

Так, при разности потенциалов $U = 1$ В (характерной для обычной батарейки) получим

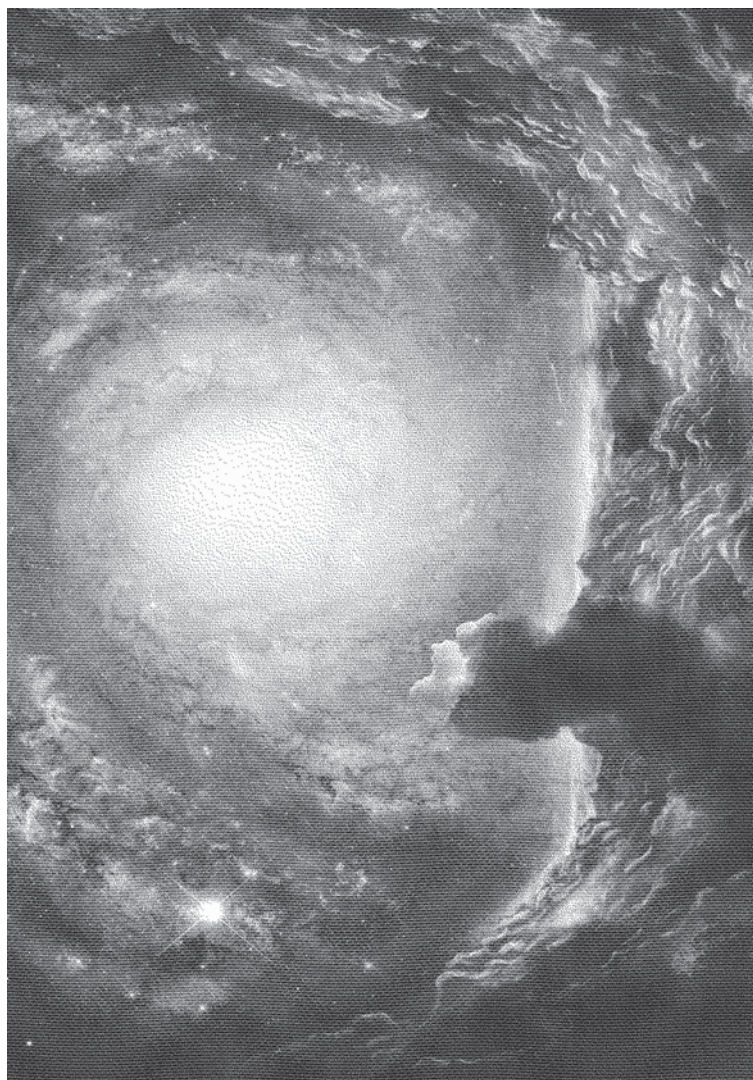
$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} \approx 10^{-9} \text{ м} = 1 \text{ нм}.$$

При этом, согласно теории Аббе, становится возможным рассматривать объекты молекулярных размеров! Это уже не микроскоп, а, можно сказать, наноскоп. Правда, он называется по-прежнему микроскопом, только *электронным*.

Обратим еще внимание на то, что в знаменателе выражения для длины волны де Бройля стоит масса частицы. А что если взять не электроны, а ионы каких-то элементов или даже молекулярные ионы? Поскольку они на много порядков массивнее электрона, их дебройлевская длина волны может быть значительно уменьшена. Вместе с нею уменьшится и различимое расстояние между двумя точками *A* и *B*. Так получился *ионный* микроскоп.

Завершим наш рассказ словами из книги английского физика Г.Липсона «Великие эксперименты в физике» (М.: Мир, 1972): «Можно сказать, что оптическая промышленность обязана теории больше, чем любая другая отрасль. Здесь теория выступала не только как обобщение практики, но и как путеводная нить».

ОБЩЕЕ



ОТ ПЯДИ ДО ВСЕЛЕННОЙ

С.Иншаков

Человечество издавна пользовалось в своей практике измерениями. Вначале это были измерения, связанные с торгово-экономической деятельностью. Первое известное упоминание о точности и достоверности измерений встречается в Библии. Так, в одной из книг Пятикнижия сказано: «Не делайте неправды в суде, в мере, в весе и в измерении.... Да будут у вас весы верные, гири верные, ефа верная...» (Ефа – мера объема для сыпучих веществ, равная 52,48 литра.) А в другой книге устанавливается основная обязанность инспектора по обеспечению единства измерений: «В кисе твоей не должны быть двоякие гири, большие и меньшие... В доме твоём не должна быть двоякая ефа, большая и меньшая.. Гиря у тебя должна быть точная и правильная, и ефа у тебя должна быть точная и правильная, чтобы продлились дни твои на земле...» (Киса – это сумка. В современном русском языке сохранилось однокоренное слово – кисет, обозначающее мешочек для махорки.)

В Древней Руси меры появились тоже очень давно, однако раздробленность княжеств приводила к тому, что меры длины, веса и объема по своему номинальному значению у разных князей различались в 1,5 – 2 раза. Единообразные меры возникли на Руси лишь с объединением княжеств в одно государство. Это – золотник (в последнем варианте 4,266 г), сажень (2,134 м), гривна (сначала денежная и весовая единица, затем счетно-денежная, равная 10 копейкам, отсюда – гривенник), пядь (расстояние между концами растянутых большого и указательного пальцев, равное 17,78 см) и др.

Тогда же был установлен и межповерочный интервал. Так, в грамоте князя Всеволода (XII в.) написано: «...торговая вся весы мерила и скалвы воцанные и пуд медовый и гривенка рублевка иже на торгу промеж людьми блюсти без пакости ни умалчивать ни умножати и на всякий год взвешивати...» (Надо полагать, скалвы – это единица меры воска, пуд – меда, а гривенка рублевка – денежная единица.) В той же грамоте

указывались и санкции для нарушителей единства измерений: «...а скривится а кому приказано и того казнити близко смерти а живот его на трое...» В общем, плохо будет нарушителю.

Дальнейшее развитие законодательная метрология получила при Петре I. В одном из его указов написано: «По указу великого государя велено чтоб у торговых и мастеровых людей были весы и фунты у всех правдивые и заклеены годовым клеймом...»

Однако в научных исследованиях роль единства измерений была осознана относительно поздно, лишь в XVIII веке, когда М.В.Ломоносов впервые ввел научные понятия меры и веса. Дальнейшее развитие метрологии как прикладной науки обеспечил во второй половине XIX века Д.И.Менделеев. Уместно привести высказывание знаменитого физика конца XIX века У.Томсона (лорда Кельвина): «Каждая величина известна лишь в той мере, в которой ее можно измерить».

Поговорим об измерениях в естественных науках на примере физики. Измерение – неотъемлемый атрибут физики. Как наука в нынешнем ее понимании, она стала оформляться в XVII веке (галилеево-ньютоновы времена). В то время она имела название «натуральная философия».

Чтобы начать изучать что-нибудь, необходимо это «что-нибудь» определить. Раз речь идет об окружающем мире, значит, это «что-нибудь» надо сначала увидеть, т.е. выделить из окружения (фона), установить различие между этим «что-нибудь» и фоном. Назовем это действие выявлением. Выявим сначала одно «что-нибудь», потом – другое «что-то». Теперь возникает проблема сравнения. Это сравнение можно проводить только по общему признаку. В самом деле, бесполезно, например, сравнивать звук, с которым первое «что-нибудь» падает на пол, и цвет поверхности второго «чего-то». (Для этого случая существует поговорка: «В огороде бузина, а в Киеве дядька».) Заметим при этом, что как общее (сравнение), так и различное (выявление) взаимосвязаны, они выступают в диалектическом единстве.

Пример 1. Рассмотрим арбуз и яблоко. Различить их можно по целому ряду признаков: цвету, запаху, вкусу, способности поглощать радиацию и т.д. Различили. Теперь будем сравнивать. Сравнить надо по общему признаку. Возьмем в этом качестве объем. Его определим так: это воздух, который вытесняется тем или иным объектом из сосуда. Вот так от сравнения объемов разных тел перешли к сравнению одного и того же – воздуха. Введем теперь определение отношения «больше – меньше». Ясно, что из воздуха, вытесненного арбузом, можно

сделать столько же воздуха, сколько вытеснило яблоко, а наоборот – нельзя. Это означает, что воздуха, вытесненного арбузом, больше, чем воздуха, вытесненного яблоком, т.е. объем арбуза больше объема яблока. Мы определили *качественное* отношение «больше – меньше».

Теперь определим *количественное* отношение, оно будет характеризоваться числом. Вот здесь и необходима процедура измерения. Сначала используем уже введенное качественное отношение. Рассмотрим такое общее свойство тел, как протяженность. Для простоты будем сравнивать протяженность в одном направлении и назовем тела, протяженности которых сравниваем, линейками. Методика сравнения такова: прикладываем линейки так, чтобы одни концы линеек находились напротив друг друга, и наблюдаем за оставшимися концами. Если они совпали, то линейки считаем равными. Если нет, то меньшей назовем ту, чей конец лежит напротив внутренней стороны другой линейки. Пока ничего нового – это качественное отношение, примененное не к объемам тел, как в примере 1, а к их протяженностям.

Сформулируем определение: *измерением физических свойств называется процедура соотнесения этим свойствам некоторых чисел таким образом, чтобы сравнение свойств можно было теперь заменить сравнением этих чисел.*

Другими словами, устанавливается взаимно однозначное соответствие между числами и свойствами. Математика здесь присутствует в механизме этого соотнесения.

Итак, если исследуемое свойство характеризуется взаимно однозначным соответствием с числом, то оно называется физической величиной. Процедура нахождения этого числа и есть измерение.

Пример 2. Берем одну линейку и принимаем ее длину за единицу измерения. Длинам всех других линеек приписываем числа, равные количеству этих единичных линеек, укладываемых на измеряемой протяженности. Опишем эту процедуру математически. Длина некоторой линейки выражается так: $L = nL_0$, где n – безразмерное число, L_0 – единица измерения. Если теперь у нас две линейки, причем $L_1 = n_1L_0$ и $L_2 = n_2L_0$, и надо найти их суммарную длину (в безразмерных числах), то

$$L_{1+2} = L_1 + L_2 = n_1L_0 + n_2L_0 = (n_1 + n_2)L_0.$$

Таким образом, при равномерном разбиении сумма длин линеек равна сумме безразмерных чисел, которые характеризуют длину каждой из них.

Пример 3. Выберем другой способ разбиения. Возьмем равномерно размеченную линейку и пронумеруем ее по следующему закону: начало – числом 1, первое деление – числом 2, второе – числом 4, ..., n -е деление – числом 2^n . Это означает, что длина делений обозначена безразмерным числом по закону $P = 2^n$. Пусть есть две линейки – длиной P_1 и P_2 . Найдем длину линейки, которая получается при сложении этих двух (в безразмерных единицах P). Теперь закон разбиения линеек неравномерный: 2^N , где N – число делений. Но разметка делениями равномерная, поэтому $N = n_1 + n_2$. В единицах P получаем

$$P_{1+2} = 2^N = 2^{n_1+n_2} = 2^{n_1} \cdot 2^{n_2} = P_1 P_2,$$

и

$$P = P_1 P_2.$$

Иными словами, в таких единицах и при таком законе нумерации делений длина суммы двух линеек равна произведению их длин. (Заметим, что именно так работала логарифмическая линейка – аналоговый калькулятор, широко использовавшийся вплоть до начала 80-х годов прошлого века. Единственное отличие в том, что для удобства пользования на шкале логарифмической линейки деления нумеровались с помощью натурального ряда чисел (1, 2, 3, ...), а длина делений была неравномерной.)

Теперь поговорим более подробно об измерениях расстояний, а именно – больших расстояний: от одного метра до размера Вселенной.

Учитывая наши собственные размеры, измерять расстояния путем непосредственного прикладывания эталонных линеек реально лишь при длине этих эталонов порядка одного метра. На больших расстояниях используется геометрия. В 1821–1823 годах этим занимался К.Гаусс. Он измерил углы между вершинами гор Брокен, Хохехаген и Инзельберг (Германия), учел поправку на сферичность (наибольшее расстояние между вершинами было около 100 км, при этом на каждой из вершин угломерные геодезические приборы устанавливались по местной плоскости горизонта и эти плоскости не были параллельными). В результате он получил, что измеренная сумма внутренних углов треугольника отличается от 180° на 0,680 дуговой секунды. Гаусс считал, что эта величина находится в пределах ошибок измерений, поэтому пространство является евклидовым (в пределах точности этих измерений). Таким образом, мы можем пользоваться хорошо разработанным математическим аппаратом евклидовой геометрии.

На практике эта задача решается с помощью топографической съемки земной поверхности. На поверхности Земли строго определяется положение ряда пунктов – как в плане, так и по высоте. Положение нескольких пунктов (геодезической основы) определяется по астрономическим измерениям: широта находится по наблюдению небесных светил, а долгота – по сравнению местного времени в двух точках в один и тот же момент. Эти пункты считаются исходными, с ними геодезическими измерениями связаны все остальные. Так образуется геодезическая сеть, покрывающая поверхность Земли. Линии, соединяющие отдельные пункты, могут образовывать треугольники или многоугольники. Длина сторон этих геометрических фигур порядка 25 км. Поскольку такие расстояния трудно измерить непосредственно при обычной прозрачности атмосферы, берут базис длиной порядка 10 км, который служит основой для построения базисной сети. Она, в свою очередь, является основой для вычисления по тригонометрическим формулам длин сторон всех треугольников геодезической сети. Наиболее точные современные измерения базиса длиной 10 км производятся с ошибкой 2 мм. Именно таким образом определяются основные расстояния на суше.

А вот для нахождения размера земного радиуса используются астрономические измерения. В один и тот же момент времени два наблюдателя смотрят прохождение одной и той же звезды через зенит. При этом наблюдатели должны располагаться на одном меридиане. Для более южного наблюдателя звезда в зените находится на луче KS_1 , для северного наблюдателя ее положение будет отличаться от местного зенита NM на угол θ (рис.1). Таким образом можно вычислить радиус земного шара R , зная расстояние между двумя точками N и K , находящимися на одном меридиане, и разность их географических широт.

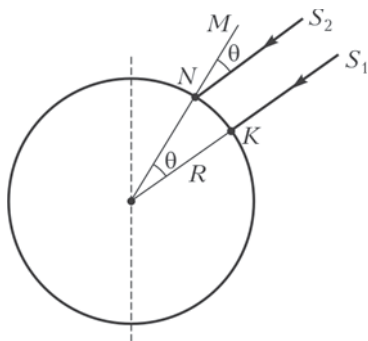


Рис. 1

Пример 4. Определим радиус земного шара по географической широте конкретных пунктов. Возьмем на карте Подмосковья на одном и том же меридиане два пункта – Большой Москворецкий мост, его широта $55^{\circ}45'00''$, и мост через реку Упу в Туле, его широта $54^{\circ}11'44''$. Расстояние между этими пунктами равно 174 км вдоль меридиана. Используя связь между углом, образу-

емым радиусами окружности, и длиной дуги между ними, получаем $R = NK/\theta = 6391$ км (естественно, угол надо брать в радианной мере). Реально радиус Земли равен 6378 км, отличие связано с тем, что Земля не совсем шар.

Расстояния в пределах Солнечной системы можно вычислять по известным периодам обращения планет и третьему закону Кеплера. Но так могут быть определены лишь относительные расстояния. Абсолютные же расстояния в пределах Солнечной системы находятся с помощью измерений горизонтальных *параллакс*ов небесных светил. Параллакс – это угол, на который сместится объект наблюдения при перемещении наблюдателя на некоторое базовое расстояние. Для астрономических объектов базовое расстояние должно быть достаточно большим, в противном случае будет, как в стихотворении Пушкина, посвященном А.П.Керн: «Я ехал к вам: живые сны / За мной вились толпой игривой / И месяц с правой стороны / Сопровождал мой бег ретивый...» Другими словами, угловое смещение месяца при движении Александра Сергеевича в течение нескольких часов было совершенно незаметно, особенно по сравнению с громадным угловым смещением элементов пейзажа.

Оценим смещение Луны относительно звезд. Напомним, что суточное вращение Земли приводит к угловому перемещению небесной сферы со скоростью $15^\circ/\text{ч}$. Будем считать, что скорость повозки была около $15 \text{ км}/\text{ч}$, время поездки к Керн – не более 4 ч, тогда базовое расстояние получается порядка 60 км. Расстояние от Земли до Луны, как нам теперь известно, равно 384400 км, и угловое смещение Луны относительно звезд без учета собственного движения Луны вокруг Земли будет составлять $0,56''$ (или 78 микрорадан), что на глаз абсолютно незаметно. Учтем собственное движение Луны вокруг Земли. Оно происходит с угловой скоростью $0,5^\circ/\text{ч}$, поэтому за 4 ч Луна сместится на 2° – на глаз тоже совсем незаметно. Вот почему для определения параллакса желательны одновременные измерения из двух мест с максимально возможной базой. (Можно, конечно, проводить и не одновременные измерения, но тогда необходимо учитывать изменение положения светила за время между измерениями.)

На земле максимально возможная база – диаметр земного шара, поэтому традиционно за эталонную базу принимают земной радиус. Угол p между направлениями, по которым светило M было бы видно из центра Земли и из какой-нибудь точки на ее поверхности, называется суточным параллаксом светила. Иными словами, суточный параллакс есть угол, под

которым со светила был бы виден радиус Земли, проведенный из центра Земли на ее поверхность (в исходную точку наблюдения). Если светило наблюдается на горизонте, то суточный параллакс максимален. В этом случае он называется горизонтальным параллаксом. Так как Земля имеет форму не сферы, а сфероида, то горизонтальные параллаксы вычисляются для одного конкретного радиуса. Это — экваториальный радиус Земли $R_0 = 6378$ м, а горизонтальные параллаксы, вычисленные для него, называются горизонтальными экваториальными параллаксами p_0 . (Естественно, нет необходимости проводить астрономические наблюдения непосредственно на экваторе. Так как географические координаты обсерваторий известны, то результаты измерений, выполненных там, можно пересчитать на любую точку земной поверхности.) Именно эти параллаксы тел Солнечной системы и приводятся в справочниках. Горизонтальный параллакс у всех тел Солнечной системы весьма невелик — у Луны он $57'$, у Солнца $8,79''$, у большинства планет меньше $1'$.

Зная горизонтальный экваториальный параллакс светила, легко определить его расстояние до центра Земли (рис.2). Из прямоугольного треугольника $ТОМ$ имеем $\Delta = R_0 / \sin p_0$. Для всех светил, кроме Луны, параллаксы очень малы, поэтому данную формулу можно написать иначе: положив $\sin p_0 = p_0'' \sin 1'' = p_0'' / 206265$, получим

$$\Delta = \frac{206265 R_0}{p_0''}.$$

Расстояние Δ получается в тех же единицах, что и радиус Земли R_0 , число 206265 является

обратной величиной синуса одной дуговой секунды, а горизонтальный экваториальный параллакс берется в дуговых секундах. Наибольшее расстояние, которое наблюдается между Землей и самым дальним объектом Солнечной системы, равно 6055959000 км ($p_0 = 0,22''$). Это расстояние свет проходит за 5 часов 36 минут.

Появление и развитие радиолокации в середине XX века позволило непосредственно определить расстояния до ряда планет (вплоть до Юпитера). Они оказались именно теми, что

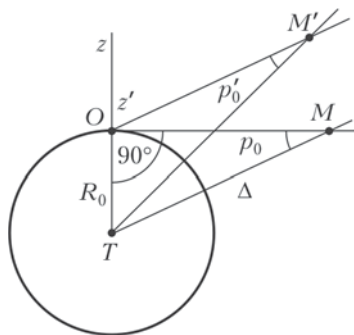


Рис. 2

были вычислены по горизонтальным экваториальным параллаксам.

Расстояния от Солнца до ближайших звезд определяются с помощью годовых параллакс. Принцип тот же, что и для суточных горизонтальных параллакс, но база гораздо больше (рис. 3). При этом рассматривается угловое смещение звезды

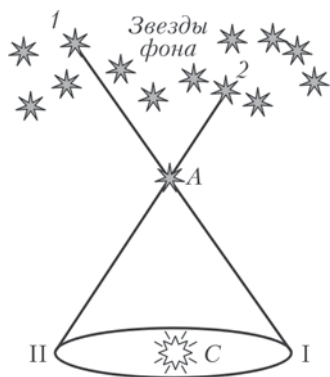


Рис. 3

относительно более удаленных звезд с полугодовым интервалом между измерениями, когда Земля переместится на расстояние диаметра своей орбиты. Угол, под

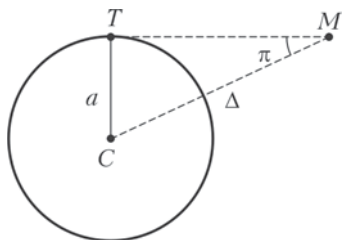


Рис. 4

которым был бы виден средний радиус земной орбиты при условии, что направление на звезду перпендикулярно радиусу, называется годовым параллаксом звезды и обозначается π (рис. 4).

Формула аналогична предыдущей, только в качестве базы теперь взят средний радиус земной орбиты $a = 149600000$ км:

$$\Delta = \frac{206265a}{\pi''}.$$

Смещения эти совсем невелики. Так, ближайшая к нам звезда Проксима (в переводе с греческого – ближайшая) из созвездия Центавра имеет годовичный параллакс $\pi = 0,762''$. В результате наблюдений с Земли были измерены годовичные параллаксы более 16000 звезд.

Наилучшие современные определения годовичных параллакс выполняются с космических аппаратов. Еще в 1966 году французский астроном П.Лакурт предложил использовать спутник для проведения массовых астрономических наблюдений. В 1975 году был создан и одобрен Европейским космическим агентством проект «Гипаркос» – в переводе «спутник для сбора высокоточных параллакс». Летом 1989 года космический

аппарат был выведен на орбиту, и через несколько месяцев начались систематические наблюдения. В программу наблюдений было включено около 100 тысяч звезд, каждая из них наблюдалась 60–80 раз при точности единичного наблюдения $0,01''$, что в результате дало точность около $0,001 - 0,002''$.

В астрономии, помимо километров, приняты следующие единицы расстояний:

астрономическая единица (а.е.) – среднее расстояние от Земли до Солнца, равное 149600000 км;

парсек (пк), сокращенно от «параллакс» и «секунда» – расстояние, соответствующее годичному параллаксу в $1''$;

световой год – расстояние, которое свет проходит за один год.

Соотношение между этими единицами таково:

$1 \text{ пак} = 30,86 \cdot 10^{12} \text{ км} = 206265 \text{ а.е.} = 3,26 \text{ светового года};$

$1 \text{ световой год} = 9,460 \cdot 10^{12} \text{ км} = 63240 \text{ а.е.} = 0,3067 \text{ пак}.$

В астрономических единицах обычно выражают расстояния до тел Солнечной системы. Например, Меркурий находится от Солнца на расстоянии 0,387 а.е., а Плутон – 39,4 а.е. Расстояния до небесных тел за пределами Солнечной системы обычно выражаются в парсеках, килопарсеках (10^3 пак) и мегапарсеках (10^6 пак), а также в световых годах.

В настоящее время метод годичных параллаксов теоретически позволяет измерять расстояния до 1600 световых лет ($\Delta = 0,002''$). Но на таком большом расстоянии точность измерения уменьшается до 50%.

Еще большие расстояния удалось измерить другим методом, основанном на изучении закономерностей светимости переменных звезд. Во Вселенной встречаются переменные звезды двух типов – затменно-переменные, когда имеются две звезды, вращающиеся вокруг общего центра масс и при этом более яркая периодически затмевает менее яркую, и физически переменные, когда пульсирует одна звезда. Типичным представителем физически переменной звезды, регулярно меняющей свою яркость, является звезда δ созвездия Цефея. Все физически переменные звезды (а их достаточно много во Вселенной) принято называть цефеидами. В начале XX века в Гарвардской обсерватории (США) стали изучать цефеиды в соседней галактике, известной под названием Магелланового Облака. Каждая цефеида имеет свой характерный период изменения яркости: от нескольких дней до сотен дней и более. Была найдена закономерность: чем длиннее оказывался период изменения яркости, тем ярче была сама звезда. А расстояние от Земли до Магелланового Облака во много раз больше расстояния между самими звездами, т.е. с

большой точностью их можно считать равноудаленными от Земли. Отсюда вывод: связь между периодом и яркостью носит абсолютный характер, цефеиды с одинаковым периодом обладают одинаковой яркостью. Поэтому если на небе обнаруживались две цефеиды с одинаковыми периодами, но при этом яркость одной была в четыре раза меньше, то это означало, что она расположена вдвое дальше — яркость меняется обратно пропорционально квадрату расстояния.

Самое же большое из известных расстояний было измерено так. В оптике известен эффект Доплера — изменение частоты света, излучаемого объектом, при его приближении к наблюдателю или удалении от него. В акустике этот эффект тоже существует — каждый, кто находился на железнодорожной платформе при прохождении сигнальной электрички, мог убедиться, что при приближении тон сигнала высокий, а при удалении низкий. По изменению частоты можно вычислить относительную скорость. В двадцатые годы прошлого века астрономы в результате измерений доплеровского смещения спектральных линий света от галактик обнаружили, что почти все они разлетаются, и в ряде случаев с очень большой скоростью. Так, скорость удаления от нас галактик в созвездии Девы составляет около 1000 км/с. А сейчас найдены объекты, удаляющиеся со скоростями порядка 0,8 скорости света (240000 км/с). В конце 20-х годов прошлого века американский астроном Э.Хаббл показал, что скорость относительного движения галактик пропорциональна расстоянию между ними — более далекие от нас галактики имеют большую скорость, чем близкие. Связь между скоростями галактик и расстоянием до них устанавливается законом Хаббла: $v = H \cdot L$, где коэффициент пропорциональности H называют постоянной Хаббла. В настоящее время значения постоянной Хаббла, оцениваемые различными авторами, лежат в пределах от 60 до 80 км/(с · Мпк). Обычно используется значение постоянной Хаббла 75 км/(с · Мпк). При этом расстояние до объекта, имеющего скорость 240000 км/с, оказывается равным

$$L_{\max} = 3200 \text{ Мпк} = 10^{23} \text{ км} = 10^{10} \text{ световых лет.}$$

Таково наибольшее измеренное к настоящему времени расстояние — самый «край» Вселенной.

О РОЛИ ПАРАДОКСОВ В РАЗВИТИИ НАУКИ

Г.Алавидзе

Развитие науки на разных ее этапах определяется, вообще говоря, различными факторами. Стало уже общепринятым утверждение о том, что научные открытия происходят в результате усилий, направленных на решение задач, в основе которых лежат практические потребности человека. Нельзя упускать из виду и значение обычной человеческой любознательности и врожденного стремления к познанию нового, неизведанного. Но что дает первоначальный импульс к поиску? Представляется, что таким импульсом являются парадоксы, которые указывают на внутренние противоречия основ существующей теории.

Слово «парадокс» – греческого происхождения и означает нечто неожиданное, необычное. В современной науке под этим понятием подразумевают такой теоретический вывод относительно какого-то явления, который не согласуется с нашим представлением и знанием об этом явлении. После обнаружения парадокса (или парадоксов) начинается интенсивный научный поиск, который приводит к пересмотру основ существующей теории и созданию новой. Именно необходимость преодоления парадоксов была причиной замены механики Аристотеля на механику Ньютона, а впоследствии – создания теории относительности Эйнштейна.

История парадоксов указывает на то, что в науке ничто не принимается в качестве непререкаемой истины. Рано или поздно все подвергается «ревизии», и в этом смысле в науке нет непререкаемых авторитетов. Это можно назвать здоровым научным скепсисом.

Механика Аристотеля и первые механические парадоксы.

Первую попытку научного объяснения механических явлений приписывают древнегреческому философу Аристотелю. Взгляды Аристотеля на механическое движение основываются не на экспериментах, а на общих философских принципах. Механическое движение он объясняет стремлением тел к своему есте-

ственному положению. Земля ему представлялась центром Вселенной, и поэтому все тела стремятся к этому центру. Движение без причины (т.е. силы), вызывающей это движение, он считал невозможным. При этом прямолинейное движение по инерции Аристотель объяснял действием вытесненного телом воздуха, который, устремляясь в образовавшуюся за движущимся телом пустоту, толкает его вперед.

Из общефилософских принципов Аристотеля следует отрицание пустоты. Абсолютное движение тела (т.е. его движение относительно абсолютного пространства), по мнению Аристотеля, возможно только в неоднородном пространстве. Пустота же, по его мнению, является однородным пространством, так как в пустоте одна точка ничем не отличается от любой другой. В своей «Физике» Аристотель приводит еще одно «опровержение» существования пустоты. А именно, проводя элементарные наблюдения над движущимися телами, он приходит к выводу, что скорость свободного падения тела пропорциональна массе тела и обратно пропорциональна плотности среды, в которой происходит движение, т.е. $v = k \frac{m}{\rho}$, где m – масса тела, ρ – плотность среды, k – коэффициент пропорциональности. Отсюда Аристотель делает вывод, что в пустоте ($\rho = 0$) скорость должна бы стать бесконечной, что невозможно. Поэтому и пустота невозможна.

Сегодня любой школьник знает, что оба приведенных утверждения – о невозможности механического движения в отсутствие силы и о бесконечной скорости тела в пустоте – не соответствуют действительности, но авторитет Аристотеля был настолько непререкаем, что его ошибочные представления о природе механического движения просуществовали почти две тысячи лет.

Первый, кто подверг сомнению некоторые утверждения Аристотеля, был византийский комментатор трудов Аристотеля Иоанн Филипон (VI в.). Вот довод, который он привел: если объяснение Аристотеля причин механического движения верно, то как объяснить вращение колеса вокруг своей оси? Где в этом случае та часть тела, которая испытывает давление вытесняемого воздуха? Парадокс Иоанна Филипона стал первой трещиной в механике Аристотеля.

Английскому философу и логике Уильяму Оккаму (XIV в.) принадлежит еще один аргумент: если бы объяснение Аристотеля причин механического движения было верным, тогда две стрелы, летящие в противоположных направлениях, оказавшись рядом, должны были бы затормозить друг друга и остановиться,

так как поток воздуха, который является движущим для одной стрелы, явился бы тормозящим для другой.

Галилео Галилей доказал ошибочность и второго утверждения Аристотеля, касающегося свободного падения тел в безвоздушном пространстве. С помощью простого, но чрезвычайно остроумного рассуждения он показал, что в безвоздушном пространстве все тела, независимо от массы, должны падать с одной и той же (конечной) скоростью. Если предположить обратное, т.е. что тяжелые тела в пустоте падают быстрее легких, то тело, полученное соединением этих двух тел, должно (как более тяжелое) падать быстрее, чем каждое из составляющих тел в отдельности. Но, с другой стороны, то из двух тел, которое легче, будет тормозить прикрепленное к нему тяжелое тело, в результате чего их суммарная скорость окажется меньше скорости тяжелого тела. Полученное противоречие и доказывает, что скорость тела в пустоте не зависит от его массы. Среди критиков чисто умозрительных тезисов Аристотеля можно назвать также известного ученого-энциклопедиста из Хорезма аля-Бируни (X–XI в.).

Как видим, пересмотр основ античной механики начался с обнаружения парадоксов, которые свидетельствовали о внутренней противоречивости существующей тогда науки. Вслед за этим началось интенсивное накопление новых экспериментальных фактов, их анализ и обобщение. Завершился этот процесс созданием механики Ньютона (XVII в.).

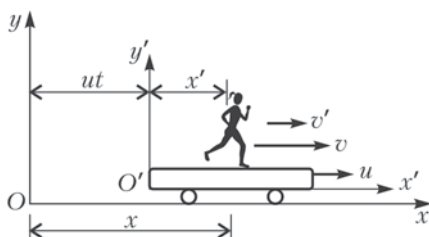
Кризис механики Ньютона. Примерно два с половиной века механика Ньютона считалась непререкаемой истиной. Но и здесь проявилась разрушительная сила парадоксов. И вот как это случилось.

К числу основополагающих принципов классической механики относится принцип относительности, согласно которому невозможно обнаружить прямолинейное и равномерное движение с помощью механических опытов. Это означает, в частности, что если мы находимся внутри космического корабля, движущегося прямолинейно и равномерно, и при этом лишены возможности наблюдать за звездами, то мы никакими механическими опытами не сможем выяснить, движется корабль или нет, а если движется, то с какой скоростью. На математическом языке это означает, что законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$x' = x - ut, \quad v' = v - u,$$

где x и x' — координаты движущейся точки относительно

неподвижной (Oxy) и подвижной ($O'x'y'$) систем координат, u – скорость подвижной системы координат, v и v' – скорости тела относительно неподвижной и подвижной систем координат соответственно (см. рисунок). Сказанное означает, что невоз-



можно доказать существование движения относительно абсолютного пространства, а следовательно, вопреки здравому смыслу, и существование этого пространства подвергается сомнению.

Надежда на то, что существование абсолютного пространства и движения относительно этого пространства будет все-таки доказано, появилась одновременно с созданием электромагнитной теории. Оказалось, что уравнения электромагнитного поля, которые были найдены в шестидесятых годах XIX века английским ученым Дж.Максвеллом, не инвариантны относительно преобразований Галилея: они видоизменяются при переходе к новой инерциальной системе координат. Следовательно, электромагнитные процессы в движущихся и неподвижных системах должны протекать по-разному. Появилась надежда, что с помощью электромагнитных опытов удастся обнаружить движение относительно абсолютного пространства. Были проведены опыты (Майкельсон и Морли), во время которых луч света пускали одновременно в двух направлениях: по направлению движения Земли и перпендикулярно этому движению. Лучи отражались от зеркал, расположенных на одинаковых расстояниях от исходной точки. Казалось бы, в точке встречи отраженных лучей должна была бы наблюдаться интерференция, что свидетельствовало бы о движении Земли относительно абсолютного пространства. Опыты дали отрицательный результат – интерференции не получилось.

Тогда ученые поставили под сомнение сами уравнения Максвелла и начали «подправлять» эти уравнения, но каждый раз обнаруживались такие электромагнитные явления, которые противоречили «исправленным» уравнениям. Наконец, нидерландский ученый Х.Лоренц в конце XIX века нашел такие преобра-

зования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны. В использованных выше обозначениях эти преобразования имеют следующий вид:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

где c — скорость света в вакууме. Как видим, преобразованию подверглись не только координаты, но и время (сравните с преобразованиями Галилея).

Преобразования Лоренца «спасли» электромагнитную теорию Максвелла, но очень сложной оказалась физическая интерпретация этих преобразований. Кроме того, теперь нужно было спасти саму ньютонову механику, так как второй закон Ньютона не инвариантен относительно преобразований Лоренца. Таким образом, на исходе XIX века физика оказалась перед лицом глубокого кризиса, в преодолении которого особая заслуга принадлежит А.Эйнштейну. Именно он в 1905 году создал стройную теорию, известную под названием специальной теории относительности, которая примирила классическую механику с новой электромагнитной теорией. При этом механике Ньютона пришлось пойти на серьезные жертвы. Так, например, пришлось отказаться от известного закона сложения скоростей; масса тела оказалась зависящей от скорости; время, которое со времен Аристотеля считалось абсолютной величиной, также оказалось зависящим от скорости. К счастью, при малых скоростях (при $u/c \ll 1$) вычисления, проведенные с помощью законов Ньютона, дают хорошие результаты. Расхождение результатов становится заметным лишь в том случае, когда скорость материальной точки становится соизмеримой со скоростью электромагнитной волны в вакууме (300000 км/с). Но такие огромные скорости пока встречаются только в атомной физике при исследовании движения элементарных частиц.

Однако триумф новой теории оказался недолговечным. Как специальная, так и общая теория относительности в последнее время подвергаются все более острой критике, физики обнаруживают в них внутренние противоречия. Идет интенсивный поиск новой, более общей и универсальной теории.

Вечные, или непознаваемые парадоксы. Рассмотренные парадоксы касались такого простейшего вида движения, каким является механическое движение. Достижения классической механики на определенном этапе породили иллюзию, что все существующие в мире явления можно свести к механическому движению и, следовательно, любое явление природы поддается

изучению методами механики. В истории науки это направление получило название «механический детерминизм». Известно, например, высказывание Лапласа о том, что он может рассчитать все явления во Вселенной, если ему дадут начальные координаты и скорости всех частиц, из которых состоит Вселенная. Уверенность Лапласа во всеилии механики была такой непоколебимой, что на вопрос Наполеона, почему в его труде не нашлось места для Бога, Лаплас ответил, что ему не понадобилась гипотеза о существовании Бога.

Дальнейшее развитие науки доказало бессосновательность такой самоуверенности. Более того, оказалось, что существуют такие сферы познания, которые не поддаются изучению не только методами механики, но и вообще не подвластны традиционным научным методам. Например, искусство, поэзия, некоторые явления человеческой психики и др. Более того, существуют, по-видимому, и вовсе непознаваемые явления. К ним, возможно, относится тайна происхождения Вселенной и ее эволюции. То же самое можно сказать о происхождении жизни. Приведем связанные с этим некоторые научные факты.

В 1922 году петроградский физик А.Фридман опубликовал статью под названием «О кривизне пространства». Выводы, к которым пришел автор статьи, были настолько неожиданными, что в них усомнился даже Эйнштейн. На основании анализа уравнений общей теории относительности Эйнштейна Фридман пришел к выводу, что метрика пространства-времени, т.е. геометрия Вселенной, не является постоянной. Эйнштейн, как и другие физики его поколения, был уверен в статичности Вселенной, поэтому он «подправил» свои уравнения таким образом, чтобы исключить возможность нестационарного решения. Впоследствии Эйнштейн признал, что это было его самой серьезной ошибкой.

По прошествии семи лет после публикации вышеупомянутой работы Фридмана справедливость его выводов подтвердил американский физик Э.Хаббл, который обнаружил центробежное движение галактик. Это открытие послужило основой известной гипотезы о происхождении Вселенной, согласно которой Вселенная, в том виде, в котором она существует сегодня, возникла в результате взрыва материи неимоверно высокой плотности. С момента взрыва и по сей день Вселенная расширяется, причем ее будущее зависит от средней плотности материи во Вселенной. Если эта плотность ρ превышает некоторое критическое значение ρ_0 ($\rho > \rho_0$), то расширение Вселенной должно постепенно замедляться и со временем смениться обратным процессом, т.е.

сжатием (так называемая замкнутая модель); если же $\rho < \rho_0$, то процесс расширения Вселенной необратим (открытая модель).

Чрезвычайно интересный результат по измерению средней плотности материи во Вселенной был получен в 2000 году во время международного эксперимента, целью которого было измерение угловых флуктуаций температуры реликтового излучения Вселенной. По результатам измерения был сделан вывод, что суммарная плотность материи во Вселенной, с учетом как обычной (видимой) части Вселенной, так и невидимой (темной) материи, а также вакуума, близка к критической. Если эти измерения верны, то предсказать, какая из двух моделей Вселенной реализуется в будущем, в принципе невозможно.

Такой же глубокой тайной окутан феномен происхождения жизни. До сих пор не нашла убедительного подтверждения ни одна из научных гипотез, объясняющих эту загадку: практически равна нулю как вероятность привнесения на землю «субстанции жизни» из космоса в какой бы то ни было форме, так и вероятность самозарождения жизни на земле в результате «счастливой» комбинации химических элементов.

Возможно, как в случае с происхождением жизни, так и в случае происхождения Вселенной и ее эволюции мы имеем дело с непознаваемыми, или вечными парадоксами. Но новое знание всегда возникает в процессе преодоления парадоксов, наличие которых свидетельствует либо о внутренней логической противоречивости существующей теории, либо о том, что появились экспериментальные факты, которые не могут быть объяснены в рамках этой теории. Парадоксы дают мощный импульс, ускоряющий процесс познания.

ЛЮДМИЛА, ЧЕРНОМОР И ШАПКА-НЕВИДИМКА

А.Стасенко

*Везде всечасно замечали
Ее минутные следы:
То позлащенные плоды
На шумных ветвях исчезали,
То капли ключевой воды
На луг измятый упали...
Сам карла утренней порою
Однажды видел из палат,
Как под невидимой рукою
Плескал и брызгал водопад.*

А.С.Пушкин

Вспомнили? Ну конечно, речь идет о Людмиле, законной супруге Руслана, похищенной нехорошим Черномором. Это она приватизировала шапку-невидимку из черноморского гардероба. Однако действительно ли Людмила могла чувствовать себя столь комфортно, а Черномор был настолько бессилен увидеть «невидимую» пленницу?

В самом деле, невидимость тела означает, что оно ничего не отражает, не поглощает и не преломляет (см. по этому поводу, например, статью В.Белонучкина «Как увидеть невидимку» в «Кванте» №4 за 2006 г.). Следовательно, хрусталик глаза, который должен фокусировать лучи на сетчатке, перестает «работать», а сетчатка, которая должна преобразовывать сфокусированную энергию в полезный сигнал, перестает что-либо поглощать.

Итак, абсолютно невидимая Людмила смогла бы перемещаться только осязая, ориентируясь лишь на звуки или запахи (что может быть тоже сомнительным – но это лежит вне темы данной статьи).

А что же Черномор? Конечно, во времена князя Владимира (Красное Солнышко) и его дружинника Руслана, т.е. в X веке, не были еще сформулированы законы теплового излучения (хотя люди не могли не чувствовать тепла, идущего от костра).

Не было и тепловизоров, которые в наше время различают участки тела с разностью температур в доли градуса. Но ведь и Черномор был не прост: «Он звезды сводит с небосклона, Он свистнет – задрожит луна...» При таких энергетических возможностях не знать законов термодинамики и равновесного электромагнитного излучения нагретых тел – совсем неприлично для колдуна.

Нормальные люди, конечно, были тогда еще менее изощренными. Только в 1879 году Йозеф Стефан из экспериментальных наблюдений установил, что полный поток энергии, излучаемой нагретым телом, пропорционален четвертой степени его температуры. Через пять лет этот факт был подтвержден теоретически (из термодинамических соображений) Людвигом Больцманом. Это важное соотношение теперь называется законом Стефана–Больцмана и формулируется так: плотность потока энергии тела, нагретого до температуры T , равна

$$q = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная, носящая имена этих ученых.

Постоянная Стефана–Больцмана является довольно красивой комбинацией «еще более фундаментальных констант» –

$$\sigma = 12\pi \frac{k^4}{c^2 h^3} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right),$$

каждая из которых венчает важнейший раздел физики:

скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – это специальная теория относительности,

постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – квантовая механика,

постоянная Больцмана $k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – статистическая физика

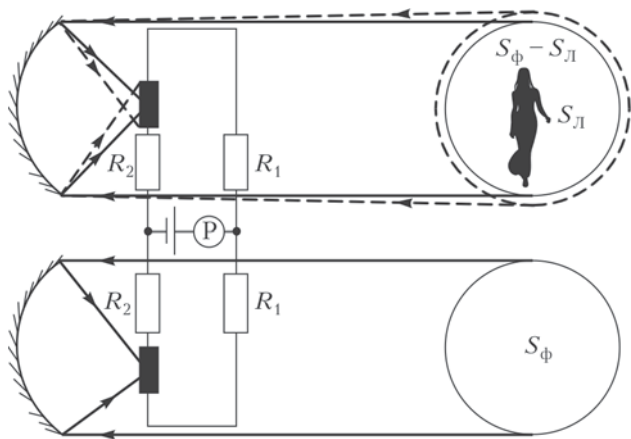
(не хватало еще постоянной тяготения!).

А еще присутствуют вездесущее число π и бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Советуем самостоятельно вычислить σ – вы получите большое удовольствие, находясь в окружении знаменитых имен.

Итак, все тела (звезды, деревья, стены, учителя и даже школьники) излучают электромагнитные волны. Часть волн, которая относится к инфракрасному излучению, т.е. невидимо-



му диапазону спектра излучения молекул, атомов и ядер, получила название теплового излучения.

Что мог бы при своем могуществе сделать Черномор? Например, взять два болометра и включить их в мостик Уитстона (см. рисунок). Болометр (от греч. «луч» и «измеряю») – это приемник излучения всех длин волн, которые, падая на него, изменяют его электрическое сопротивление. В результате с помощью болометра можно измерять мощность излучения.

Затем Черномор мог бы сфокусировать на каждый из них излучение, отраженное двумя одинаковыми параболическими зеркалами. Посмотрим, что из этого может получиться.

Если в «поле зрения» обоих зеркал попадает только фоновое излучение, то регистрирующий прибор P покажет ноль. Если же в поле зрения одного из зеркал окажется объект площадью сечения $S_{\text{Л}}$, то излучение фона будет приходить уже от площади $S_{\text{Ф}} - S_{\text{Л}}$. Тогда возникнет разность мощностей, регистрируемых болометрами:

$$\left((S_{\text{Ф}} - S_{\text{Л}}) q_{\text{Ф}} + S_{\text{Л}} \sigma T_{\text{Л}}^4 - S_{\text{Ф}} q_{\text{Ф}} \right) \Delta\Omega,$$

положив которую равной наименьшей регистрируемой мощности W_{min} , получим

$$W_{\text{min}} = S_{\text{Л}} \left(\sigma T_{\text{Л}}^4 - q_{\text{Ф}} \right) \Delta\Omega.$$

Здесь $q_{\text{Ф}} \sim \sigma T_{\text{Ф}}^4$ – плотность потока фонового излучения, $\Delta\Omega \sim \frac{D^2}{x_{\text{max}}^2}$ – телесный угол, под которым видна площадь

зеркала от излучающего его объекта, где D – диаметр зеркала, x_{\max} – максимальное расстояние между зеркалом и объектом. Тут участок фона и Людмила рассматриваются как удаленные излучающие объекты, расположенные в одной плоскости. Таким образом,

$$x_{\max} \sim D \sqrt{\frac{\sigma S_{\text{Л}} |T_{\text{Л}}^4 - T_{\text{Ф}}^4|}{W_{\min}}}.$$

Знак модуля означает, что объект может быть как теплее, так и холоднее фона.

Теперь сделаем численные оценки. Пусть диаметр зеркала $D = 0,1$ м (вполне портативный прибор), температура окружающей среды, т.е. «фона», $T_{\text{Ф}} = 21^\circ\text{C} = 294$ К (вполне комфортная температура, как и должно быть в садах волшебника), температура тела объекта – Людмилы в легкой одежде – $T_{\text{Л}} = 36^\circ\text{C} = 309$ К, площадь силуэта Людмилы $S_{\text{Л}} = 0,5$ м², а наименьшая мощность, регистрируемая прибором, $W_{\min} = 1$ мкВт. Подставляя все это в приведенное выше выражение для максимального расстояния, получим

$$x_{\max} \sim 0,1 \sqrt{\frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5 (309^4 - 294^4)}{10^{-6}}} \text{ м} \approx 700 \text{ м}.$$

Эта оценка показывает, что Черномор вполне мог бы зарегистрировать присутствие теплой Людмилы на менее теплом фоне в пределах своего очень немалого аквапарка.

Отсюда видно, что даже волшебникам полезно знать законы физики, а уж достать дефицитный прибор – для них самое простое дело.

Примечание. Приведенные выше оценки сделаны в предположении, что размеры болометра малы, а отражающие параболические зеркала собирают параллельные лучи строго в одну точку. На самом деле болометры имеют какие-то конечные размеры, а на краях отражателей происходит дифракция, так что «поле зрения» каждого зеркала увеличивается (пунктир на рисунке). Эти факторы приведут к уменьшению x_{\max} . Помимо конечного размера болометра, на размер поля зрения должно влиять и такое явление, как дифракция падающего излучения на краях входного зрачка, т.е. зеркала. Однако, чтобы не усложнять наши рассуждения, ограничимся сказанным, считая, что мы делаем, как говорят математики, оценку сверху.

ОТ ПРОСТОГО – К СЛОЖНОМУ

В.Эпштейн

Вниманию читателей предлагаются две, казалось бы стандартные, задачи к теме «Идеальный газ». В задачах используются обычные элементы «конструктора»: вертикальная трубка, запаянная с одной стороны; столбик жидкости, отделяющий воздух в трубке от окружающей среды; открытый сосуд с жидкостью. Предлагается исследовать поведение такого «конструктора» при нагревании. И выясняется, что при определенных условиях ситуация выходит за рамки стандартной и наблюдается качественное изменение характера физического процесса.

Задача 1. В вертикальной трубке, запаянной сверху (рис. 1), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой

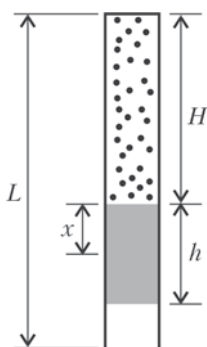


Рис. 1

H , заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре T_0 . Внешнее давление составляет H_0 мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T .

Введем безразмерные координату и температуру:

$$\xi = \frac{x}{H} \text{ и } \tau = \frac{T}{T_0}.$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $H + h < L$, то при изменении температуры давление внутри трубки не меняется. По уравнению изобарического процесса,

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T},$$

или, поскольку сечение трубки постоянно,

$$\frac{H}{T_0} = \frac{H + x}{T}.$$

В безразмерных переменных это уравнение примет вид

$$\tau = 1 + \xi, \text{ где } -1 < \xi < 0.$$

б) Если $H + h = L$, то часть ртути при повышении температуры выливается из трубки и давление там изменяется. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{V p}{T}, \text{ или } \frac{H(H_0 - h)}{T_0} = \frac{(H + x)(H_0 - (h - x))}{T}.$$

В безразмерном виде это выглядит так:

$$\tau = \frac{1}{\xi_0} (1 + \xi)(\xi_0 + \xi), \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 - h}{H}.$$

Поскольку в состоянии равновесия $h < H_0$, то $\xi_0 > 0$.

На графике на рисунке 2 представлены результаты расчетов. В случае б) (давление в трубке меняется) зависимость $\tau(\xi)$ – квадратичная функция, график которой – парабола, пересекающая ось безразмерных координат в точках $\xi = -\xi_0$ и $\xi = -1$. При

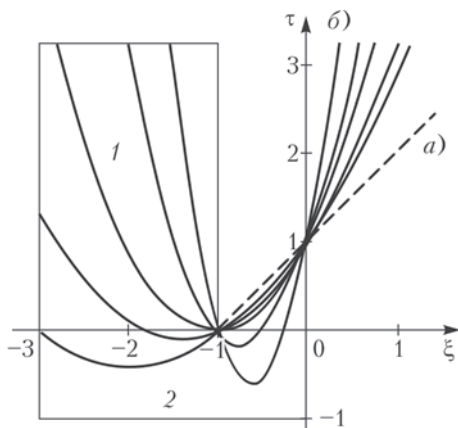


Рис. 2

этом можно выделить две группы парабол, отвечающих условиям $\xi_0 > 1$ и $\xi_0 < 1$.

Значениям $\xi < 0$ соответствует повышение уровня ртути при понижении температуры газа в трубке. Для этого необходим контакт ртути в трубке с ртутью в сосуде с открытой поверхностью.

Из графиков видно, что при $\xi_0 < 1$ изобарическая (случай а)) и неизобарическая (случай б)) зависимости различаются существенно. Между тем, качественное различие ситуаций, связанное с возможностью неоднозначной зависимости положения поверхности ртути от температуры, не наблюдается. Об-

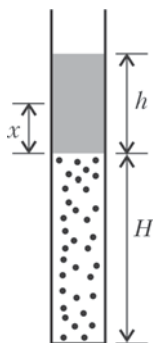


Рис. 3

ласть неоднозначности (1, 2) находится вне области допустимых значений безразмерных параметров ($\tau > 0$, $\varepsilon > -1$).

Задача 2. В вертикальной трубке, запаянной снизу (рис.3), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой H , заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре T_0 . Внешнее давление составляет H_0 мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T .

При нагревании часть ртути выливается из трубки. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{V p}{T}, \text{ или } \frac{H(H_0 + h)}{T_0} = \frac{(H + x)(H_0 + (h - x))}{T}.$$

В безразмерном виде получаем

$$\tau = \frac{1}{\xi_0}(1 + \xi)(\xi_0 - \xi), \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 + h}{H}.$$

На рисунке 4 представлены графики зависимости $\tau(\xi)$ для случаев $\xi_0 = 2$, $\xi_0 = 2,5$ и $\xi_0 = 3$.

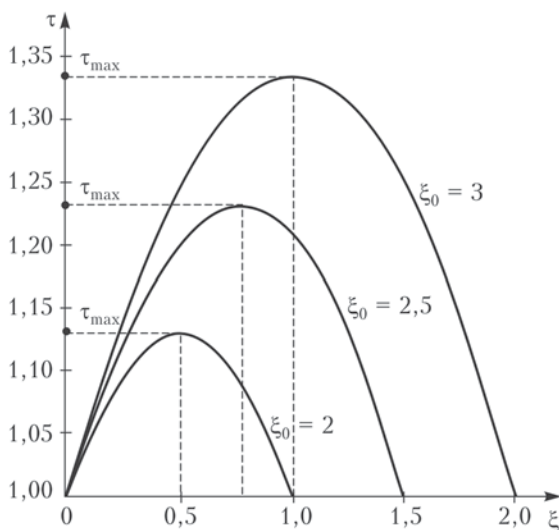


Рис. 4

Расчет и графические представления демонстрируют важное обстоятельство: наличие максимальной температуры газа. Таким образом, появляется возможность сформулировать задачу поиска минимальной температуры, при которой жидкость выльется из трубки.

Точкам параболы $\tau(\xi)$ отвечают состояния равновесия. Наличие максимальной температуры означает, что при больших значениях τ равновесия быть не может. При нагревании газа уровень ртути повышается. Если остановить нагрев при температуре, которая не достигла указанного максимального значения, прекратится и движение уровня ртути. Максимальному значению равновесной температуры соответствует определенное значение уровня ртути. При сколь угодно малом повышении температуры после достижения максимального значения ртуть выливается *сама*.

Возникает, однако, такой вопрос. Состояниям равновесия отвечают *все* точки кривой механического равновесия, а мы говорим только о той ее части, которая соответствует повышению температуры *до* достижения максимального значения. Почему? Парадоксальность ситуации состоит в том, что другой ветви параболы соответствует *понижение* уровня ртути при *повышении* температуры. Вообще, как это следует из рисунка 4, любому значению температуры, не превышающему максимальное, соответствует не одно, а *два* положения уровня ртути.

Для того чтобы разобраться в этой странной ситуации, построим график зависимости давления на границе жидкости и газа от положения этой границы. Давление со стороны жидкости (ртути) равно

$$p_{\text{рт}} = H_0 + (h - x).$$

Давление со стороны газа определяется газовым законом

$$\frac{(H_0 + h)H}{T_0} = \frac{p_{\text{г}}(H + x)}{T}.$$

Вводя, как и раньше, безразмерные параметры τ и ξ , а также безразмерное давление $\delta = \frac{p}{H}$, получим

$$\delta_{\text{г}} = \frac{\xi_0 \tau}{1 + \xi} \text{ и } \delta_{\text{рт}} = \xi_0 - \xi.$$

Графики этих зависимостей для различных фиксированных температур представлены на рисунке 5 (здесь $\xi_0 = 2$, $\tau_3 = 1,05$, $\tau_2 = 1,1$, $\tau_1 = 1,15$). Изотермам 1, 2 и 3 соответствуют температу-

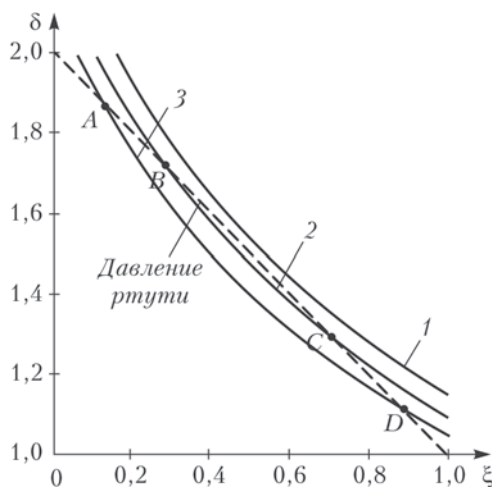


Рис. 5

ры ниже и выше максимальной соответственно: $\tau_1 > \tau_{\max} > \tau_2 > \tau_3$. Состояния равновесия определяются точками пересечения графиков. При повышении температуры точки сближаются. Кривая 1 не имеет точек пересечения. Это значит, что при температуре τ_1 равновесие недостижимо. Наличие двух точек пересечения при $\tau < \tau_{\max}$ означает, что существуют две точки равновесия. Повышению координаты границы жидкость – газ при заданной температуре соответствует снижение давления как со стороны жидкости, так и со стороны газа. Однако характер снижения давления при переходе через «нижнюю» (A и B) и «верхнюю» (C и D) точки равновесия различен: при прохождении «нижних» точек давление в жидкости становится больше давления газа, а при прохождении «верхних» точек – наоборот. Это означает, что «нижним» точкам соответствует устойчивое, а «верхним» – неустойчивое положение равновесия.

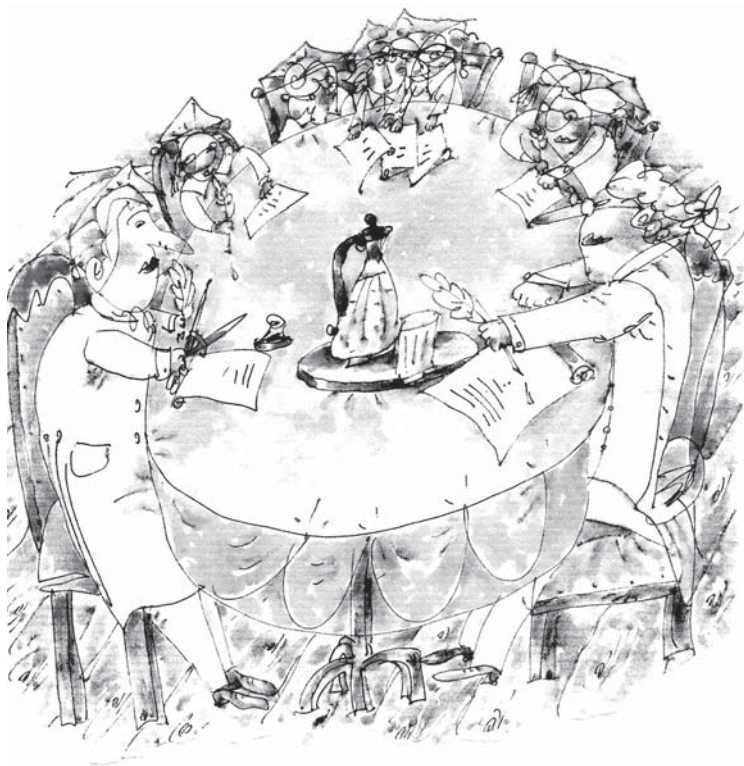
Положение неустойчивого равновесия вполне достижимо. Если между жидкостью и газом вставить тонкий поршень и измерять усилие, которым необходимо удерживать поршень, то окажется, что как в устойчивом, так и в неустойчивом положении это усилие прикладывать не нужно. Однако добиться того, чтобы ртуть при повышении температуры *сама опускалась* (в соответствии со второй ветвью параболы), невозможно. Находясь в «верхнем» положении равновесия, ртуть либо самопроизвольно выльется из трубки при повышении температуры, либо перейдет в положение устойчивого равновесия.

ТРИ ЭССЕ НА ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕМЫ

Р.Винокур

Трагический миг невесомости

В известном романе Жюль Верна «Из пушки на Луну» космические путешественники, летящие в огромном артиллерийском снаряде, якобы ощутили состояние невесомости в момент, когда снаряд пересекал центр притяжения между Луной и Землей. (Речь шла о точке, где силы притяжения,



создаваемые Луной и Землей, одинаковы по величине и противоположно направлены.) Известный американский физик-экспериментатор Роберт Вуд указал, что на самом деле состояние невесомости должно было установиться при выходе снаряда из атмосферы Земли. Этот же вывод сделан и в книге «Занимательная физика» замечательного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана.

Жюль Верн упустил из виду, что если тело и его опора движутся в пространстве с одинаковыми ускорениями, сообщаемыми только гравитационными силами, то давить друг на друга они не могут. (Имеется в виду ускорение во внешней системе отсчета, например относительно центра Земли или Солнца.) Поэтому, как только на снаряд перестали действовать пороховые газы, выталкивающие его из орудийного ствола, и сопротивление воздуха (после выхода из земной атмосферы), все предметы внутри снаряда должны стать невесомыми. Эти негравитационные силы давления пороховых газов и сопротивления воздуха действовали только на снаряд, так что, пока все они или их равнодействующая не равны нулю, ускорение снаряда отлично от ускорения находящихся в нем предметов.

Однако состояние невесомости могло возникнуть внутри снаряда еще раньше. Действительно, рассмотрим негравитационные силы, действующие на снаряд до и после его вылета из пушки. Внутри ствола на движущийся снаряд действует сила давления пороховых газов, которой противодействуют сила трения снаряда о стенки ствола и сила сопротивления воздуха. При этом сила давления пороховых газов существенно превосходит силы сопротивления воздуха, благодаря чему снаряд ускоряется в направлении движения. После вылета из ствола на снаряд действует лишь одна негравитационная сила – сила сопротивления воздуха, направленная против движения снаряда. Значит, равнодействующая негравитационных сил изменила свое направление после выхода снаряда из ствола. Поэтому в какой-то момент, когда снаряд еще находился в пушке, эта равнодействующая была равна нулю и на снаряд действовала только сила тяжести, что и соответствует условию невесомости.

К сожалению, космические путешественники не смогли бы ощутить состояние невесомости по причине гибели из-за гигантских перегрузок при разгоне снаряда в орудийном стволе...

Впрочем, по мнению поэта Игоря Северянина, творчество Жюль Верна не подлежит критическому научному анализу:

*...Он предсказал подводные суда
И корабли, плывущие в эфире.
Он фантастичней всех фантастов в мире
И потому – вне нашего суда.*

В конце концов, никто не бывает всегда и абсолютно прав, и это можно показать на примере все той же физической задачи. Помимо гравитационных сил со стороны Солнца, Луны и других космических гигантов на снаряд и предмет внутри него действует взаимная сила притяжения, которая мала из-за сравнительно небольших масс этих тел и практически неощутима. Однако из-за этого эффекта абсолютное состояние невесомости не могло быть достигнуто.

Минус две рыбы и открытие позитрона

...Нас было трое на рыбалке – Джон, Пол и я, Гаррис. Темза здесь изобилует щуками, плотвой, угрями и уклейкой. Гуляя по берегу, вы можете видеть их целые стаи, но поймать их на крючок не так просто. Время шло, а рыба не ловилась. И тогда Пол рассказал нам с Джоном об одной математической задаче, которую он решал в рождественском конкурсе, организованном Кембриджским студенческим обществом:

«Три рыбака улеглись спать, не поделив улова. В час ночи проснулся один из них и уехал домой, взяв с собой треть улова. При дележке на три равные части у него оказалась лишняя рыба, которую он выбросил в реку. В два часа ночи проснулся второй рыбак и, не зная, что один из его компаньонов уже уехал, снова разделил улов на три равные части. У него тоже осталась лишняя рыба, которую он выбросил в реку. В три ночи проснулся третий рыбак и проделал ту же операцию, поделив улов на троих и выбросив «лишнюю» рыбу. Сколько рыб выловили рыбаки?»

Мы с Джоном достали карандаш и бумагу и получили общее решение задачи: рыбаки поймали $(27N - 2)$ рыбы, где N – целое число. При $N = 1$ эта формула дает 25 рыб, а при $N = 2$ получается, что рыбаки поймали 52 рыбы. Мы решили, что 25 рыб – наиболее реальное число, но оказалось, что Пол предложил другое решение: минус две рыбы (при $N = 0$). Мы с Джоном дружно рассмеялись. В свое время смеялись и члены жюри конкурса, увидев такое необычное решение.

Между тем, мы поймали лишь одну рыбу на троих, больше клева не было, и мы разбрелись по берегу, ища хорошее место

каждый в отдельности. Впрочем, удача нам не сопутствовала. Первым вернулся Джон, вспомнив, что ему надо возвращаться домой раньше других. Решив взглянуть напоследок на ранее пойманную рыбу, он вытащил ее из ведра. Неожиданно рыба вырвалась из его рук и нырнула в реку. Огорченный Джон решил возместить эту общую потерю. Он сбегал в соседний трактир, занял у трактирщика похожую рыбу из свежего улова, бросил ее в наше ведро и уехал домой не прощаясь (как истинный англичанин). Следует заметить, что трактирщик поставил условие, чтобы ему впоследствии вернули не деньги, а рыбу. Затем появился Пол, и с ним произошла такая же история – он тоже задолжал трактирщику одну рыбу. Потом это случилось со мной, когда Джон и Пол уже уехали.

Встретившись на следующий день, мы выяснили, что произошло, и долго смеялись, так как в результате мы поймали ровно минус две рыбы: одну выловили в самом начале рыбалки, а три рыбы нам предстояло поймать, чтобы вернуть долг трактирщику. Непривычное математическое решение оказалось вполне реальным...

Фамилия Пола была Дирак, а его специальностью была теоретическая физика. Однажды Дирак, решая уравнения, описывающие движение электрона, обнаружил отрицательные решения там, где обычно рассматривались только положительные значения. Вспомнив задачу «о минус двух рыбах», он не пренебрег этим случаем, а предположил, что у электрона есть двойник, во всем подобный электрону, но с положительным электрическим зарядом вместо отрицательного.

Такая элементарная частица была вскоре обнаружена экспериментально, и ее назвали позитроном. Впоследствии двойники-античастицы были открыты почти у всех элементарных частиц.

Объемный взрыв над Тунгусской тайгой

В интересной статье Льва Дыхно «Тунгусская катастрофа: новая гипотеза», напечатанной в журнале «Вестник» в 1997 году, я увидел знакомое имя – Михаил Цикулин, член комиссии по изучению Тунгусского метеорита при Академии наук СССР.

Когда-то в бывшей стране Советов наука ассоциировалась с романтикой, а физики считались весьма уважаемым сословием. Молодежь зачитывалась романом Даниила Гранина «Иду на грозу», а фотографии Эйнштейна стали обязательным атрибутом дома и на работе.

*Качает, качает, качает задира ветер
фонари над головой.
Шагает, шагает, шагает веселый парень
по весенней мостовой.
Листает, листает, листает, учебник
физики листает на ходу.
Не знает, не знает, не знает,
что я по улице вслед за ним иду,*

— звучала песня по радио из репродукторов.

Зимой 1969 года я, тогда третьекурсник Московского физико-технического института, попал на практику в Институт физики Земли, где Михаил Цикулин заведовал лабораторией. Я уже успел прочитать его с соавторами статью о моделировании Тунгусского взрыва. По мнению Цикулина, огромное космическое тело вошло в атмосферу Земли и, пролетая над тайгой с большой скоростью, создало ударную воздушную волну, повалившую деревья. В эксперименте, поставленном для проверки гипотезы, роль деревьев играли пластмассовые модели, воткнутые в песок, а для создания ударной волны использовался шнуровой взрывной заряд, положо натянутый над ними — вдоль предполагаемой траектории космического пришельца. В конце шнурового заряда был прикреплен небольшой сферический заряд, имитирующий взрыв метеорита в конечной точке полета. Эксперимент показал, что форма зоны, где пластмассовые модели были повалены, соответствуют реальной картине в Тунгусской тайге.

Однако сам Цикулин был не очень удовлетворен этим научным успехом. «Есть и другие гипотезы, — сказал он. — Если хотите, приходите делать диплом по этой теме. А пока читайте и думайте — может появится своя идея. Только помните принцип Оккама: чем проще гипотеза, тем она надежней. Кое-кто, например, предполагает, что в 1908 году над тайгой взорвался инопланетный космический корабль». Потом Цикулин читал нашей группе курс по теории взрыва. В июне 1969 года он попросил нашего согласия, чтобы перенести экзамен на неделю раньше. «Ради бога, извините за неудобство, — говорил он смущенно, — однако у меня действительно важная причина». Причиной оказалась трудная операция, сразу после которой Цикулин скончался. Ему было тогда 42 года.

Мы успели обсудить с ним несколько новых гипотез и остановились на идее объемного взрыва пыли в воздухе. Давно известно, что при распылении в воздухе быстро сгорающих мелких частиц — угольной пыли в шахтах, мучной пыли на

мельницах, сахарной пудры на конфетных фабриках и даже каменной пыли в каменоломнях и строящихся горных туннелях — нередко случались так называемые объемные взрывы. Физический эффект состоит в следующем.

Поскольку отношение площади поверхности к объему у пылинок намного больше, чем у того же вещества, сжатого в комок, пылинки могут быстро прогреться электрическим разрядом или вспышкой пламени до температуры воспламенения. При достаточном количестве кислорода сгорание происходит почти мгновенно и поэтому подобно взрыву. С другой стороны, благодаря большой суммарной поверхности движущаяся пыль сравнительно легко электризуется трением частиц о воздух и между собой, поэтому вероятность электрических разрядов довольно велика.

Предполагается, что Тунгусский метеорит был сравнительно малой кометой, просмотренной астрономами и состоявшей в основном из углистого хондрита. Могло произойти вот что. Комета, с ее небольшим твердым ядром и объемистым пылевым шлейфом, полого вошла в земную атмосферу и вызвала поначалу свечение облаков в зоне длиной около тысячи километров, наблюдаемое рядом свидетелей. Облако углистой пыли, вытянувшееся вдоль траектории движения, под действием земного тяготения опускалось все ниже и ниже, пока не достигло плотных слоев атмосферы, где кислорода уже было достаточно для быстрого сгорания. Роль детонатора мог сыграть электрический разряд в атмосфере (например, молния). После взрыва остатки небесного тела упали на землю в виде черной пыли, содержащей углистый хондрит.

Объемная, или вакуумная, бомба давно имеется в военных арсеналах, но широко не применяется (существуют определенные международные соглашения на этот счет). При ее первичной детонации выделяется облако взрывчатого геля, затекающее в щели, окопы и убежища. Потом (секунд через двадцать) срабатывает второй детонатор, и облако взрывается по всему своему объему.

Интересно, что гипотеза Льва Дыхно по существу тоже базируется на идее объемного взрыва. Однако в его модели необходимо одновременное наличие двух редких явлений — небесного тела, принесшего космические частицы, и большого газового выброса из недр Земли. Вероятность такого совпадения крайне мала. Так что гипотеза пылевого взрыва в нижних слоях атмосферы представляется более надежной.

ТЕМА С ВАРИАЦИЯМИ

В.Эпштейн

Структура курса физики иногда напоминает музыкальные формы. Простые темы (народные мотивы) композитор разворачивает вариациями, и в результате получается, к примеру, оркестровая симфония. Простые школьные задачи (поучительные сами по себе) демонстрируют идеи, лежащие в основе фундаментальных физических теорий. Вот пример такого рода.

Тема – задача 35

(«Сборник задач по физике» А.П.Рымкевича, 1992 г.)

Расстояние s необходимо проехать на лодке туда и обратно один раз по реке, скорость течения которой v_p , а другой раз по озеру. Скорость лодки относительно воды оба раза v_d . Докажите, что поездка туда и обратно по реке всегда занимает больше времени, чем по озеру.

Предварительный анализ

Первая (и вполне естественная) реакция на условие задачи – времена равны: выигрыш времени при движении по течению компенсируется потерей времени на обратном пути. Более глубокий анализ (или, для физиономистов, выражение лица преподавателя) показывает, что все не так просто. Компенсация, конечно, имеется, но не полная. К этому выводу можно прийти, исходя из качественных соображений, которые стоит запомнить: их можно будет применить при решении других задач.

1) Придадим параметрам задачи допустимые значения, при которых ответ становится очевидным.

В нашем случае при $v_p > v_d$ катер, движущийся по реке, никогда не вернется в исходный пункт (рис.1). Можно предположить, что и при других значениях скоростей время движения в реке будет больше, чем в озере.

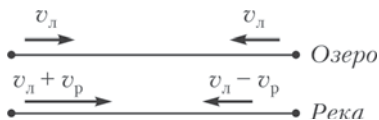


Рис. 1

2) Сравним времена воздействия различных факторов.

В нашей задаче время движения против течения заведомо больше, чем по течению.

Таким образом, фактор, мешающий движению, действует дольше, чем фактор помогающий. Следует, очевидно, ожидать, что мешающий фактор будет превалировать над помогающим.

Решение задачи

Время движения в озере равно

$$t_1 = \frac{2s}{v_л}.$$

Время движения в реке составляет

$$t_2 = \frac{s}{v_л + v_p} + \frac{s}{v_л - v_p} = \frac{2v_л s}{v_л^2 - v_p^2} = \frac{2s}{v_л - \frac{v_p^2}{v_л}}.$$

Видно, что время движения в реке больше, так как числители обеих формул одинаковы, в то время как знаменатель второй заведомо меньше знаменателя первой.

Вариации на тему задачи 35

Рассмотрим конструкцию прибора для определения скорости движения лодки относительно воды. Прибор представляет собой жесткое основание, на котором располагаются

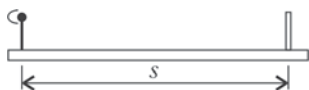


Рис. 2

источник звука и отражатель (рис.2). Для измерений прибор закрепляют на корпусе лодки снаружи так, чтобы во время движения прибор не увлекал воду.

Измеряется время, за которое звуковой импульс распространяется от источника до отражателя и возвращается к источнику. По этому времени легко вычисляется скорость движения лодки относительно воды. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. Дело в том, что распространение звука имеет важную особенность: скорость звука относительно среды, в которой он распространяется, не зависит от скорости источника звука. (Этим распространение звука существенно отличается, например, от движения осколков разорвавшейся гранаты: если в момент взрыва граната двигалась, скорость

осколков относительно гранаты суммируется со скоростью гранаты.) С учетом этого обстоятельства в системе отсчета, связанной с прибором, скорость звука будет равна $v_{зв} - v_{л}$ (здесь $v_{зв}$ – скорость звука относительно воды), когда звук распространяется от источника к отражателю, и $v_{зв} + v_{л}$ при распространении в обратном направлении. Но тогда совершенно ясно, что время между излучением и приемом звукового импульса определяется формулой для времени движения лодки в реке с заменой $v_{л}$ на $v_{зв}$ и $v_{р}$ на $v_{л}$:

$$t_2 = \frac{2s}{v_{зв} - \frac{v_{л}^2}{v_{зв}}}.$$

Зная расстояние s между источником звука и отражателем и определив время t_2 , мы легко определяем искомое значение скорости лодки:

$$v_{л} = \sqrt{v_{зв} \left(v_{зв} - \frac{2s}{t_2} \right)}.$$

Усложним задачу. Попробуем определить скорость лодки, если величина s не известна (или изменяется). Решение можно получить, если произвести измерение времени до того, как лодка начала двигаться. Это время определяется формулой для времени движения лодки в озере с соответствующей заменой:

$$t_1 = \frac{2s}{v_{зв}}.$$

Из двух последних формул можно исключить s и, таким образом, решить поставленную задачу:

$$v_{л} = v_{зв} \sqrt{1 - \frac{t_1}{t_2}}.$$

А можно ли найти скорость лодки, если измерения в условиях неподвижной лодки не проведены? Предположим также, что опустить прибор, скажем, в движущуюся вместе с лодкой ванну и определить t_2 тоже нельзя. (Например, если вода протекает сквозь лодку и ванну, как сквозь решето. Странная конструкция, не правда ли?) Оказывается, и такую задачу можно решить. Для этого необходимо развернуть прибор перпендикулярно движению лодки и произвести второе измерение времени распространения звука. Ясно, что принятый звуковой импульс распространялся вдоль равных сторон треугольника, как это показано на рисунке 3. Легко рассчитать время распространения t_3 . Как

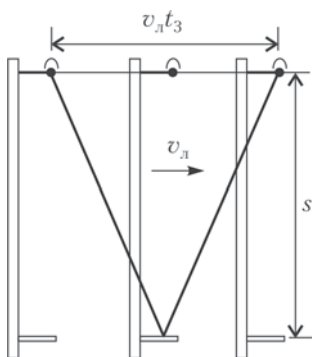


Рис. 3

видно из рисунка,

$$\left(v_{\text{л}} \frac{t_3}{2}\right)^2 + s^2 = \left(v_{\text{зв}} \frac{t_3}{2}\right)^2,$$

откуда получаем

$$t_3 = \frac{2s}{\sqrt{v_{\text{зв}}^2 - v_{\text{л}}^2}}.$$

Сравнивая времена t_2 и t_3 , находим

$$\frac{t_2}{t_3} = \frac{v_{\text{зв}}}{\sqrt{v_{\text{зв}}^2 - v_{\text{л}}^2}}.$$

Отсюда и определяется скорость лодки:

$$v_{\text{л}} = v_{\text{зв}} \sqrt{1 - \frac{t_3^2}{t_2^2}}.$$

«Индикатором» движения, таким образом, является отношение времен t_2 и t_3 .

Вряд ли рассмотренный прибор может быть действительно использован для определения скорости корабля или самолета. Существуют более простые и надежные средства для решения той же задачи. И тем не менее, идея устройства оказывается плодотворной. Она имеет прямое отношение к революционному преобразованию классической физики – созданию теории относительности. Впрочем, речь при этом пойдет о необычной лодке, плывущей по необычному озеру.

Теория Максвелла. Плавание Земли в эфире

Во второй половине XIX века в истории науки произошло знаменательное событие. В результате создания Максвеллом теории электромагнетизма была теоретически предсказана возможность излучения электромагнитных волн, при этом были указаны их свойства и условия излучения. Также было показано, что частным случаем излучения является видимый свет. Расчеты Максвелла были подтверждены опытами Герца. В частности, выяснилось, что, в полном соответствии с общими свойствами волновых процессов, скорость распространения электромагнитной волны (света) не зависит от скорости движения источника излучения относительно среды. С другой стороны, и расчеты и эксперименты показали, что свет может распространяться в вакууме. Исходя из этого, Максвелл прихо-

дит к заключению (единственно возможному, с его точки зрения): то, что мы считаем пустотой, на самом деле упругая среда. Максвелл называет ее эфиром. Эфир заполняет всю Вселенную. Он играет для света ту же роль, что и вода для звука: звук — распространение колебаний воды, а свет — эфира.

Но почему же мы не замечаем присутствия этой среды? Ответ прост: частицы, из которых состоит эфир, настолько малы, что они свободно проходят сквозь любое тело, а следовательно, и сквозь датчик измерительного прибора. А как же тогда установить факт существования эфира? Максвелл предлагает идею, суть которой рассматривалась нами в решении задачи 35 и в вариациях на тему этой задачи. Источник звука заменяется источником света, а в качестве лодки используется наша планета Земля, которая несется по своей орбите вокруг Солнца, т.е. сквозь эфир, со скоростью 30 км/с.

Идея этого опыта была реализована Майкельсоном и Морли в 1887 году. Увы, результат эксперимента оказался отрицательным — движение Земли относительно эфира обнаружено не было ($t_3 = t_2$). Именно отрицательный результат опыта Майкельсона и Морли был одной из основных предпосылок для пересмотра основ классической механики и значительно способствовал признанию специальной теории относительности.

Впрочем, это уже совсем другая история.

Приложение к журналу «Квант» №2/2016

Школа в «Кванте»

ФИЗИКА

Часть 2

Составители *В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 6 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

Индекс 90964



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№ 2/2016